

5. soutěžní série

4. 5. 2015

Úloha 1. Komplexní čtvercové matice téhož rozměru A, B splňují

$$AB - BA = A.$$

Dokažte, že A je singulární.

Úloha 2. (seriál 1) Pro $m, n \in \mathbb{N}_0, n \geq m$ sečtěte

$$\sum_k \binom{k}{m} \binom{n}{k}.$$

Úloha 3. Buď $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$ a $f : S \rightarrow S$ dána předpisem $f(x) = x - 1/x$. Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S) = \emptyset.$$

$f^{(n)}$ značí složení $f \circ \dots \circ f$ (n krát).

Úloha 4. (seriál 2) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

Nápověda: $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pro $|x| \leq 1$.