4. domácí série

13. 4. 2015

Úloha 1. Na sféře je daných 5 bodů. Dokažte, že 4 z nich leží na jedné (uzavřené) polosféře.

Úloha 2. (seriál 1) Rozhodněte, zda platí: Pro všechna celá $n \geq 2$ je výraz

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{2n}{k}$$

dělitelný osmi.

Úloha 3. Buď f funkce spojitá na $[0,1]$ a diferencovatelná na $(0,1)$ a platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Pak existuje n různých čísel $c_1, \ldots, c_n \in (0,1)$, která splňují

$$\prod_{k=1}^{n} f'(c_k) = 1.$$

Dokažte.

Úloha 4. Nechť G je grupa. Dokažte, že množina

$$\{a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in G\}$$

je podgrupa generovaná prvky tvaru $aba^{-1}b^{-1}$, $(a, b \in G)$.

Úloha 5. (seriál 2) Buď $a_1 = 1/2$ a $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Úloha 6. Ukažte, že počty orientovaných hamiltonovských cest v orientovaném grafu a v jeho doplňku mají stejnou paritu.

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`