2. domácí série

Úlohy se budou předvádět na semináři 16. 3. 2015

Úloha 1. Označme N_n počet uspořádaných n-tic přirozených čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, která splňují $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n = 1$. Rozhodněte, zda je N_{10} sudé nebo liché.

Úloha 2. Dokažte, že těžiště konvexní oblasti v $\mathbb{R}^2$ půlí alespoň 3 tětivy této oblasti.

Úloha 3. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a nekonstantní a nechť existuje $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující $F(f(x), f(y)) = f(x+y)$ pro všechna x, $y \in \mathbb{R}$. Pak f je ryze monotónní. Dokažte.

Úloha 4. (seriál 1) Pro nezáporné celé n sečtěte

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Úloha 5. Vypočtěte

$$\int_0^{+\infty} \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} \dots \right) dx.$$

Úloha 6. Dokažte, že dvě konečné grupy G_1, G_2 jsou isomorfní právě tehdy, když platí: Pro každou konečnou grupu H je počet homomorfismů $G_1 \to H$ stejný, jako počet homomorfismů $G_2 \to H$.