5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 23. 4. 2014.

Úloha 1. Koeficienty mocniné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ splňují $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ a $3a_n + 4a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ pro $n = 2, 3, \ldots$. Najděte poloměr konvergence a funkci, ke které řada konverguje.

Úloha 2. Nechť 1 není vlastním číslem ortogonální matice A. Buď B matice, která vznikne z A tak, že nahradíme jeden řádkový vektor vektorem opačným. Pak 1 je vlastním číslem matice B. Dokažte.

Úloha 3. Ukažte, že pro $n \to \infty$ má skoro každý graf průměr 2. Přesněji: označme A_n počet grafů na n vrcholech, které mají průměr 2 a B_n počet všech grafů na n vrcholech. Pak $\lim_{n\to\infty} A_n/B_n = 1$.

Úloha 4. Ukažte, že v každé konečné grupě G jsou následující podmínky ekvivalentní:
(1) Rovnice $x^3ax^6ax^6ax^3a^2x^3ax^6ax^6ax^3 = b$ má řešení pro každé a, $b \in G$,
(2) Rovnice $x^2a^2x^4a^2x^4a^2x^2ax^2a^2x^4a^2x^4a^2x^2 = b$ má řešení pro každé a, $b \in G$.

Úloha 5. Buď f čtyřikrát diferencovatelná na $\mathbb{R}$ se spojitou čtvrtou derivací na $[0, 1]$, která navíc splňuje

$$\int_0^1 f(t)dt + 3f(1/2) = 8\int_{1/4}^{\cancel{2/3}\,3/4} f(t)dt.$$

Ukažte, že existuje $c \in (0, 1)$, pro které $f^{(4)}(c) = 0$.

Úloha 6. Nechť $p \equiv 7 \pmod 8$ je prvočíslo. Dokažte

$$\sum_{k=1}^{p} \left\lfloor \frac{k^2+k}{p} \right\rfloor = \frac{2p^2+3p+7}{6}.$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`