4. soutěžní série

16. 4. 2014

Úloha 1. Buď M množina všech reálných matic $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ takových, že $|a_{ij}| \leq 1$. Spočtěte $\max\limits_{A \in M} \det A$.

Úloha 2. Nechť μ, ν jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že platí

$$\int_0^1 (1 - x^\mu)^{1/\nu} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x^\nu)^{1/\mu} \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 3. Nechť d, k a q jsou přirozená čísla, k liché. Najděte nejvyšší mocninu dvojky, která dělí

$$\sum_{n=1}^{2^d k} n^q.$$

Úloha 4. Ignác dostal na Velikonoce herní desku o rozměrech $m \times n$, kde m, n jsou lichá přirozená čísla. Umístil na ni $\frac{1}{2}(mn-1)$ dominových kostek tak, že se nepřekrývaly a jediné volné pole byl jeden roh desky. Dokažte, že pro každý další roh umí dominové kostky poposouvat tak, aby bylo volné pole na tomto rohu. Kostky se mohou posouvat pouze do volného pole.

výsledky na `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`