4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 9. 4. 2014.

Úloha 1. Polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty má alespoň třináct různých celočíselných kořenů. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat $|P(n)|$, pokud $n \in \mathbb{Z}$ není kořen $P(x)$?

Úloha 2. Nechť T je strom s množinou vrcholů V. Pro $v \in V$ definujme

$$\mu(v) = \sum_{w \in V} d(v, w),$$

kde $d(v, w)$ je délka cesty v T mezi v a w. Dokažte, že jsou-li $x, y \in V$ dva různé vrcholy spojené hranou s $v \in V$, pak $\mu(v) < \frac{1}{2}(\mu(x) + \mu(y))$.

Úloha 3. Nechť rostoucí posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^2} = 0.$$

Dokažte, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_{n_k+1} - x_{n_k}}{n_k} = 0.$$

Úloha 4. Buď $n \in \mathbb{N}$ a G konečná podgrupa multiplikativní grupy všech regulárních $n \times n$ komplexních matic. Dokažte, že součet všech matic z G je nulový právě tehdy, když má nulovou stopu.

Úloha 5. Pro přirozená čísla a, b, c, m platí

$$abcm = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Pak $m = 4$. Dokažte.

Úloha 6. Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, která pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ splňuje

$$f(x, y) = f(y, z) \Rightarrow x = y = z.$$