3. soutěžní série

2. 4. 2014

Úloha 1. Buď $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, která splňuje

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \leq y^2$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že f má vlastní derivaci v každém bodě.

Úloha 2. Ostroúhlý trojúhelník ABC má strany délek a, b, c a obsah S. Dokažte, že pro bod P uvnitř $\triangle ABC$ platí

$$a \cdot |PA| + b \cdot |PB| + c \cdot |PC| \geq 4S,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když P je průsečík výšek $\triangle ABC$.

Úloha 3. Označme Z vektorový prostor všech reálných antisymetrických 3×3 matic. Dále pro reálnou symetrickou 3×3 matici S označme Γ_S homomorfismus $Z \to Z$ definovaný předpisem $\Gamma_S(A) = AS + SA$. Dokažte, že pro S jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) Γ_S je automorfismus,

(ii) stopa S není vlastním číslem S.

Úloha 4. Nechť p je liché prvočíslo a c celé číslo. Dokažte, že

$$\sum_{n=0}^{(p-1)/2} \binom{2n}{n} c^n \equiv \left(\frac{1-4c}{p}\right) \pmod{p},$$

kde $\left(\frac{x}{y}\right)$ značí Legendreův symbol, tj.

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \equiv 0 \pmod{y} \\ 1 & \text{pokud } x \equiv n^2 \pmod{y} \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}, \\ & \qquad \text{a } x \not\equiv 0 \pmod{y} \\ -1 & \text{jinak} \end{cases}$$

---

výsledky na `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`