3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 26. 3. 2014.

Úloha 1. Buď R komutativní okruh, $a \in R$ a $P \subsetneq aR$ prvoideál. Dokažte, že $aP = P$.

Úloha 2. Nechť W, X, Y, Z jsou body v rovině. Dokažte, že

$$|WX|^2 + |XY|^2 + |YZ|^2 + |ZW|^2 \geq |WY|^2 + |XZ|^2.$$

Úloha 3. Mějme dvě posloupnosti reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejichž členy pro všechna $n > 1$ splňují $y_n = 2x_n + x_{n-1}$. Dokažte, že pokud $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, pak konverguje i $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Úloha 4. Řekneme, že polynom je *pozitivně rozložitelný*, pokud ho můžeme zapsat jako součin dvou nekonstantních polynomů s kladnými reálnými koeficienty. Dokažte, že pro libovolný polynom $P(x)$ splňující $P(0) \neq 0$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí: pokud je polynom $P(x^n)$ pozitivně rozložitelný, pak i $P(x)$ je pozitivně rozložitelný.

Úloha 5. Ukažte, že pro $n \geq 3$ platí: Konvexní n-úhelník má takovou triangulaci, že v každém vrcholu se sbíhá ~~sudý~~ lichý počet trojúhelníků, právě když n je dělitelné třemi.

Úloha 6. Jednotkový interval je rozdělen dvěma náhodně zvolenými body na tři úsečky. Ukažte, že pravděpodobnost, že úsečky mají délky výšek nějakého trojúhelníka, je

$$\frac{12\sqrt{5}\ln((3+\sqrt{5})/2)}{25} - \frac{4}{5}.$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`