1. soutěžní série

Úloha 1. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá 1-periodická funkce. Dokažte, že existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$.

Úloha 2. NASA se rozhodla postavit na (dokonale kulatém) Měsíci několik základen a silnice mezi nimi. Celý projekt musí splňovat následující kritéria:

- Z každé základny do každé se lze dostat po nějaké posloupnosti silnic.
- Ke každé základně B existuje i *protější základna* B' na přesně opačném místě Měsíce.
- Vede-li silnice mezi základnami B a C, pak vede i mezi k nim protějšími základnami B', C'.
- Vede-li silnice mezi základnami B a C, pak se jejich posádky co do velikosti liší nejvýše o sto lidí.

Dokažte, že existuje základna Z a k ní protější základna Z', jejichž posádky se co do velikosti liší nejvýše o sto lidí.

Úloha 3. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: Každý polynom s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny, racionálními koeficienty a reálnými kořeny je charakteristickým polynomem nějaké symetrické matice s racionálními členy.

Úloha 4. Mějme lichý počet intervalů délky jedna na reálné ose. Označme S množinu všech bodů, které leží v lichém počtu z těchto intervalů. Ukažte, že S je sjednocením konečného počtu disjunktních intervalů o celkové délce nejméně jedna.