1. domácí série

Úloha 1. Existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje

$$|f(x+y) + \sin x + \cos y| < 2\,?$$

Úloha 2. Jasmína má dva tisíce kuliček, z nichž tisíc váží deset gramů a dalších tisíc 9,9 gramů. Na kolik nejméně vážení dokáže vybrat dvě disjunktní podhromady o stejném počtu kuliček, avšak rozdílných celkových hmotnostech, má-li k dispozici rovnoramenné váhy, které zobrazují rozdíl hmotností na svých ramenech?

Úloha 3. Buď X konečná alespoň dvouprvková množina a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ systém s vlastností: každá vlastní podmnožina X má neprázdný průnik se sudým počtem množin z $\mathcal{C}$. Dokažte, že pak $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ nebo $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$.

Úloha 4. Nechť $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ jsou dvě stejně orientované ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že $(a_1 + 2b_1, \dots, a_n + 2b_n)$ je také báze $\mathbb{R}^n$ a má tu samou orientaci.

Úloha 5. Rozhodněte, zda existuje kladné reálné číslo r takové, že existuje zobrazení $f\colon [0,1]^3 \to [0,r]^2$ s vlastností

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| \qquad \text{pro všechna } x, y \in [0,1]^3.$$

Normou myslíme euklidovskou normu v příslušných prostorech.

Úloha 6. Nechť kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geq 3)$ splňují

$$\bigl(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\bigr)^2 > (n-1)\bigl(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4\bigr).$$

Dokažte, že pak už každá trojice vybraná z těchto čísel může být délkami stran nedegenerovaného trojúhelníka.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`