5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 6. 5. 2024

Úloha 1. Některá pole tabulky $n \times n$ jsou označena, přičemž platí:

(i) každé neoznačené pole sousedí stranou s některým označeným polem

(ii) mezi každými dvěma označenými poli existuje cesta tvořená výhradně označenými poli (po sobě jdoucí pole cesty sousedí stranou)

Dokažte, že označených polí je aspoň $\frac{n^2-2}{3}$.

Úloha 2. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je definována takto: $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} + 1$ pro $n \geq 1$. Ukažte, že pro každé kladné reálné číslo b lze najít a_k, pro něž $a_k < bk$.

Úloha 3. Uvažujme neprázdnou množinu G s binární operací, která je asociativní, z $ac = bc$ plyne $a = b$, z $ca = cb$ plyne $a = b$ a pro každý prvek je množina jeho mocnin konečná. Je G nutně grupa?

Úloha 4. Zkonstruujte rovnoramenný trojúhelník, je-li dán poloměr kružnice vepsané a poměr vzdáleností vrcholů od středu kružnice vepsané.

Úloha 5. Buď n přirozené číslo, které není druhou mocninou. Najděte všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, k nimž existuje kladné reálné číslo r takové, že obě čísla

$$r^a + \sqrt{n} \quad \text{a} \quad r^b + \sqrt{n}$$

jsou racionální.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

5th home series

Solutions will be presented at the seminar on May 6, 2024.

Problem 1. Some fields of the $n \times n$ table are labeled, where:

(i) every unlabeled square shares a side with a labeled square

(ii) between every two labeled fields there is a path consisting entirely of labeled fields (consecutive fields of the path share a side)

Prove that there are at least $\frac{n^2-2}{3}$ labeled fields.

Problem 2. The sequence $a_1, a_2, a_3, ...$ is defined so that $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} + 1$ for $n \geq 1$. Show that for every positive real number b we can find a_k so that $a_k < bk$.

Problem 3. Consider a non-empty set G with a binary operation that is associative, $ac = bc$ implied $a = b$, $ca = cb$ implies $a = b$, and for each element the set of its powers is finite. Is G necessarily a group?

Problem 4. Construct an isosceles triangle given the radius of the incircle and the ratio of the distances of the vertices from the incenter.

Problem 5. Let n be a positive integer that is not a perfect square. Find all pairs (a, b) of positive integers for which there exists a positive real number r, such that

$$r^a + \sqrt{n} \text{ and } r^b + \sqrt{n}$$

are both rational numbers.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`