4. soutěžní série – řešení

1. Pravděpodobnost je $\frac{n!(n+1)!}{(3n+1)(2n)!}$. Nejprve zanedbejme čísla dělitelná třemi, ty mohou být na kterýchkoli pozicích kromě první. Součet všech čísel má zbytek 1 mod 3, proto zbytky uvažovaných čísel musí být v tomto pořadí: 1, 1, -1, 1, -1, ..., 1, -1 (konstruujme odzadu). Nyní přidáme čísla dělitelná třemi kamkoli kromě první pozice, to dává $\binom{3n}{n}$ možností. Počet permutací čísel se stejnými zbytky je $(n+1)!n!n!$ a počet všech permutací je $(3n+1)!$, což dává hledanou pravděpodobnost:

$$\frac{1}{(3n+1)!}(n+1)!n!n!\binom{3n}{n} = \frac{n!(n+1)!}{(3n+1)(2n)!}.$$

2. Konstantní funkce jistě vyhovují. Ukážeme, že ostatní funkce nikoli. Označme $g(x) = f'(x)$ a předpokládejme $g(x_0) \neq 0$ pro nějaké x_0. [Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že g musí utéct do nekonečna v konečném čase. Aplikujme postup pro separované proměnné:] Pak $g'(x) \leq -(g(x))^2$, tj. g je nerostoucí. BÚNO $g(x_0) < 0$ (jinak budeme analogicky pracovat s $h(x) = -g(2x_0 - x)$, která splňuje stejnou nerovnost a $h(x_0) < 0$). Pak $g < 0$ na $(x_0, +\infty)$. Pak na tomto intervalu

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \leq -1.$$

Přeintegrujme od x_0 do $z > x_0$:

$$-\frac{1}{g(z)} + \frac{1}{g(x_0)} \leq -(z - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g(z)} \geq \frac{1}{g(x_0)} + z - x_0.$$

Ale pro $z = x_0 - 1/g(x_0) > x_0$ je pravá strana rovna 0, což je spor s $g(z) < 0$.

A trikové řešení: definujme $g(x) = e^{f(x)}$. Pak $g > 0$ a ze zadání $g'' \leq 0$, tj. je konkávní. To splňují jen konstantní funkce.

3. Nelze. Pro spor předpokládejme, že kruh lze rozdělit na dvě shodné části $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ a nechť T je shodné zobrazení $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Označme kruh jako K a střed kruhu jako O. BÚNO $O \in \mathcal{A}$. Nechť $O_1 = T(O)$. Pak celé $\mathcal{B}$ leží uvnitř kruhu o poloměru 1 se středem v O_1. Nechť X, Y jsou průsečíky hranice K s kolmicí na OO_1 v O. Pak $|X - Y| = 2$ a O je střed XY. Tedy pokud $X_1 = T(X)$, $Y_1 = T(Y)$, pak $|X_1 - Y_1| = 2$ a O_1 je střed X_1Y_1. Z trojúhelníkové nerovnosti $2 = |X_1 - Y_1| \leq |X_1 - O| + |O - Y_1| \leq 2$. Protože tu nastává rovnost, leží X_1 i Y_1 na hranici K a O leží uvnitř úsečky X_1Y_1, tedy X_1Y_1. Ale protože O_1 je střed X_1Y_1, je $O_1 = O$, což je spor.

4. Existuje. Uvažujme orientovaný graf s n vrcholy odpovídajícím prvkům G a hranou z a do b, pokud $ga = b$ nebo $ha = b$. K nalezení požadované posloupnosti nám stačí najít cestu délky $2n - 1$. Dokonce existuje eulerovský cyklus délky $2n$. Stačí si uvědomit, že graf je souvislý a každý vrchol má dvě vstupní a dvě výstupní hrany.