4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 22. 4. 2024

Úloha 1. Najděte

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \min \left\{ \left| k - \ell\sqrt{3} \right| : k, \ell \in \mathbb{N}_0, k + \ell = n \right\}.$$

Úloha 2. Buď A konečná množina kladných reálných čísel, $B = \{x/y \mid x, y \in A\}$ a $C = \{xy \mid x, y \in A\}$. Ukažte, že $|A| \cdot |B| \leq |C|^2$ (zde $|M|$ značí mohutnost množiny M).

Úloha 3. Ukažte, že číslo $1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n} + 5^{4n}$ je složené pro každé přirozené n.

Úloha 4. Hrací deska sestávající z $(2n + 1) \times (2n + 1)$ polí je pokryta dominy kromě jednoho rohového pole. V každém tahu můžeme některé domino posunout ve směru jeho delší strany a tím zakrýt volné pole a jiné pole odkrýt. Určete množinu všech polí, která mohou být odkryta konečným počtem tahů. Dokažte, že tato množina nezávisí na počáteční situaci.

⋆ **Úloha 5.** Dán trojúhelník $A_0B_0C_0$. Je-li dán bod P, pak pro $i = 1, 2, 3$ označíme A_i, B_i, C_i po řadě paty výšek spuštěných z P na přímky $B_{i-1}C_{i-1}$, $A_{i-1}C_{i-1}$, $A_{i-1}B_{i-1}$ (předpokládáme, že P je různý od A_{i-1}, B_{i-1}, C_{i-1}). Najděte bod P uvnitř $A_0B_0C_0$, pro který je obsah $A_3B_3C_3$ maximální.

⋆ **Úloha 6.** Existuje množina kružnic v rovině taková, že každá přímka v rovině je tečnou právě tří kružnic z této množiny?

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

4th home series

Solutions will be presented at the seminar on April 22, 2024.

Problem 1. Find

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \min\left\{\left|k-\ell\sqrt{3}\right| : k,\ell\in\mathbb{N}_0, k+\ell=n\right\}.$$

Problem 2. Let A be a finite set of positive reals, let $B=\{x/y \mid x,y\in A\}$ and let $C=\{xy \mid x,y\in A\}$. Show that $|A|\cdot|B|\le|C|^2$.

Problem 3. Show that $1+5^n+5^{2n}+5^{3n}+5^{4n}$ is a composite number for each positive integer n.

Problem 4. A gameboard consisting of $(2n+1)\times(2n+1)$ fields is covered by dominos except one of the corner fields. In each move we can shift one domino in the direction of its longer side to cover the empty field and uncover another field. Determine the set of all fields that can be uncovered by a finite number of moves. Prove that this set is independent of the initial situation.

⋆ **Problem 5.** Given a triangle $A_0B_0C_0$. If a point P is given, then for $i=1,2,3$ we denote A_i, B_i, C_i the feet of perpendiculars from P to lines $B_{i-1}C_{i-1}$, $A_{i-1}C_{i-1}$, $A_{i-1}B_{i-1}$ respectively (we assume that P is different from A_{i-1}, B_{i-1}, C_{i-1}). Find the point P inside $A_0B_0C_0$, for which is the area of $A_3B_3C_3$ maximal.

⋆ **Problem 6.** Is there a set of circles in the plane such that every line in the plane is tangent to exactly three circles from the set?

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`