3. soutěžní série

25. 3. 2024

Úloha 1. Najděte nejmenší kladné reálné číslo r s následující vlastností: Pro libovolnou volbu 2024 jednotkových vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_{2024} \in \mathbb{R}^2$ existuje v rovině bod p takový, že pro každou podmnožinu S množiny $\{1, 2, \ldots, 2024\}$ leží vektor $\sum_{i \in S} v_i$ v kruhu $\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - p|| \leq r\}$.

(10 bodů)

Úloha 2. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pro něž čísla

$$n, f(n), f(f(n)), \ldots, f^{m-1}(n)$$

dávají po dvou různé zbytky modulo m, a to pro libovolnou dvojici (n, m) celých čísel, $m > 1$.

(10 bodů)

Úloha 3. Nechť B je množina všech přirozených čísel, v jejichž desítkovém zápise se nevyskytuje číslice 9. Určete

$$\inf \left\{ p \in \mathbb{R}^+ \mid \sum_{n \in B} \frac{1}{n^p} \text{ konverguje} \right\}.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Hra dvou hráčů začíná s jednou tyčkou délky 1 a čtyřmi tyčkami délky 4. Hráči se střídají v tazích, přičemž tah spočívá v rozlomení jedné tyčky na dvě menší s celočíselnými (kladnými) délkami, nebo odstranění n tyček délky n (pro některé $n \in \{1, 2, 3, 4\}$) ze hry. Hráč, který nemůže hrát, prohrál. Který hráč má vyhrávající strategii?

(10 bodů)

3rd contest series

25. 3. 2024

Problem 1. Find the smallest positive real number r with the following property: For every choice of 2024 unit vectors $v_1, v_2, \ldots, v_{2024} \in \mathbb{R}^2$, a point p can be found in the plane such that for each subset S of $\{1, 2, \ldots, 2024\}$, the sum $\sum_{i \in S} v_i$ lies inside the disc $\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - p|| \leq r\}$. (10 points)

Problem 2. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that the numbers

$$n, f(n), f(f(n)), \ldots, f^{m-1}(n)$$

are distinct modulo m for all integers n, m with $m > 1$. (10 points)

Problem 3. Let B be the set of all positive integers that do not contain digit 9 in their decimal representation. Determine

$$\inf \left\{ p \in \mathbb{R}^+ \mid \sum_{n \in B} \frac{1}{n^p} \text{ converges} \right\}.$$

(10 points)

Problem 4. A game of 2 players starts with one stick of length 1 and four sticks of length 4. The players move alternately. Each move consists of breaking one stick into two smaller ones with integer (positive) lengths or removing n sticks of lengths n (for some $n \in \{1, 2, 3, 4\}$). A player that cannot move has lost. Which player has the winning strategy? (10 points)