3. soutěžní série – řešení

1. Pokud jsou všechny vektory stejné, kruh musí obsahovat body 0 a $2024v_1$, a proto musí mít poloměr alespoň 1012. Pro $r = 1012$ volme $p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2024} v_i$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\left\| \left(\sum_{i \in S} v_i \right) - p \right\| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in S} v_i - \sum_{j \notin S} v_j \right\| \le \frac{1}{2}(|S| + 2024 - |S|) = 1012.$$

2. Nechť pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ máme $p|f(k) - k$, pak volbou $n = k$, $m = p$ dostaneme $n \equiv f(n) \pmod{m}$, spor. Tedy nutně musí platit $|f(k) - k| = 1$. Nechť dále pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ platí $f(k) = k + 1$ a $f(k+1) = k$, pak pro $n = k$, $m = 3$ dostaneme spor. Vyhovovat mohou pouze funkce $f_+(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$; $f_-(n) = n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$; $f_d(n) = n + 1$, $n \ge d$, $f_d(n) = n - 1$, $n < d$ pro pevné $d \in \mathbb{Z}$. Snadno vidíme, že tyto funkce vyhovují.

3. Hledané infimum je $\log_{10} 9$. Označme B_k množinu všech k-místných čísel neobsahujících devítku. Těchto čísel je $8 \cdot 9^{k-1}$ a leží v intervalu $[10^{k-1}, 10^k]$. Součet přes takováto čísla tedy můžeme odhadnout shora a zdola takto:

$$8 \cdot \left(\frac{9}{10^p} \right)^{k-1} = \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{p(k-1)}} \ge \sum_{n \in B_k} \frac{1}{n^p} \ge \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{pk}} = \frac{8}{10^p} \cdot \left(\frac{9}{10^p} \right)^{k-1}.$$

Jistě geometrické posloupnosti v této nerovnosti mají konečné součty členů, právě když $9 < 10^p$, tj. $p > \log_{10} 9$.

4. Vyhrávající strategii má druhý hráč. Pozici ve hře reprezentujeme uspořádanou čtveřicí (k, l, m, n), kde i-té číslo značí počet tyček délky i, na začátku tedy $(1, 0, 0, 4)$. Označme $r = k + m \mod 2$, $s = l + n \mod 3$ a $t = s - r \in \{0, 1, 2, -1\}$. Označme $P = \{(k, l, m, n) : t = 0\}$ a $N = \{(k, l, m, n) : t \ne 0\}$. Ukážeme, že P je množina výherních pozic, tj. že každý tah z N vede do P a pro každou pozici v P existuje tah, který vede do N a (evidentně) $(1, 0, 0, 4) \in P$, $(0, 0, 0, 0) \in P$.

Pokud jsme v P a odstraňujeme tyčky, změní se buď $k + m$ o lichý počet, nebo $l + n$ o dvě, tj. právě jedno z čísel r, s a skončíme v N. Pokud lámeme, je třeba nahlédnout, že v každém z případů $2 \to 1 + 1$, $3 \to 1 + 2$, $4 \to 1 + 3$, $4 \to 2 + 2$ se mění právě jedno z čísel r, s a tah vede do N. Pokud jsme v N a $t = -1$, tj. $r = 1$, $s = 0$, můžeme buď odebrat tyčku délky 1 ($\to r = 0, s = 0$) nebo zlomit tyčku délky 3 ($\to r = 1, s = 1$), což dává P. Pokud $t = 1$, tj. buď $s = 2$, $r = 1$, nebo $s = 1$, $r = 0$, rozlomíme tyčku sudé délky na dvě tyčky lichých délek a tím se dostaneme do P. Pokud $t = 2$, tj. $s = 2$, $r = 0$, buď odstraníme 2 tyčky délky 2 nebo (pokud tam nejsou) rozlomíme tyčku délky 4 na $2 + 2$, čímž vynulujeme s. Tím je důkaz hotov.