2. soutěžní série – řešení

1. Například, v polárních souřadnicích $h(r,\phi) = (r\sin(n\phi), \phi - 2\pi/n)$ pro $2\pi/n \le \phi \le 2\pi$ a $h(r,\phi) = (0,0)$ jinak.

2. $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 2^2$, $5 = 2 + 3$. Dále matematickou indukcí a rozlišíme 2 případy. 1. sudé $n = 2m$: najdeme vyhovující součet pro m a všechny sčítance vynásobíme dvěma. 2. liché n: buď m nejvyšší mocnina trojky nepřevyšující n a položme $p = \frac{1}{2}(n-m)$. Pokud je $p = 0$ jsme hotovi. Pokud $p > 0$, najdeme vyhovující rozklad pro $p = \sum s_i$ a vezmeme dvojnásobky jednotlivých sčítanců. Ukážeme, že $n = m + \sum 2s_i$ je vyhovující rozklad. Jistě $2s_i$ není násobkem $2s_j$, ani m není násobkem $2s_j$. Také $2s_j$ není násobkem m, protože pak by $2s_j \ge 2m$ (m liché), tj. $n \ge m + 2s_j \ge 3m$, což je spor s tím, že m je největší mocnina trojky nepřevyšující n.

3. Označme si $M = \{0, 1, \dots, n-1\}$ a volme $a \circ b = a + 1 \pmod n$. Pak máme

$$[(a+1 = b+1) \Rightarrow (a = b)] \quad \& \quad [a + 1 \ne a + 1 + 1].$$

4. Dosazením $(-1,-1)$ dostaneme $f(1) \ge f(-1)^2 + \alpha + \beta \ge \alpha + \beta$. Tedy z dosazení $(1,1)$ dostaneme $f(1)^2 \le f(1) + \alpha + \beta \le 2f(1)$, čili $f(1) \le 2$. Ale zároveň víme, že $f(1) \ge f(-1)^2 + \alpha + \beta \ge 2$, tedy $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$ a $\alpha + \beta = 2$. Nyní dosazením $(x, 1)$ dostaneme $f(x) \ge \alpha x + \beta$ a dosazením $(-x,-1)$ dostaneme $f(x) \le \alpha x + \beta$. Tedy $f(x) = \alpha x + \beta$. Analogicky zároveň $f(x) = \alpha + \beta x$. Tedy $\alpha = f(0) = \beta$ a z $\alpha + \beta = 2$ máme $\alpha = \beta = 1$. Tedy úloha nemá řešení pro $(\alpha,\beta) \ne (1,1)$, a pro $(\alpha,\beta) = (1,1)$ je jediným možným řešením $f(x) = x + 1$, což jednoduše ověříme že funguje.