Kapitola 7

Lineární zobrazení

Je-li $\mathbf{A}$ matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa $\mathbf{T}$, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je součin $\mathbf{Ax} \in \mathbf{T}^m$. Matice $\mathbf{A}$ tak určuje zobrazení z aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$ do aritmetického prostoru $\mathbf{T}^m$. Toto zobrazení má dvě důležité vlastnosti, které ihned vyplývají z pravidel pro počítání s maticemi.

- Platí $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{T}^n$,
- platí $\mathbf{A}(k\mathbf{x}) = k(\mathbf{Ax})$ pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ a libovolný skalár $k \in \mathbf{T}$.

Tyto dvě vlastnosti motivují následující definici.

Definice 7.1 *Předpokládáme, že* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$ *jsou vektorové prostory nad stejným tělesem* $\mathbf{T}$. *Zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *se nazývá* lineární zobrazení, *pokud platí*

- $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ *pro libovolné dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$, *a*
- $A(k\mathbf{x}) = kA(\mathbf{x})$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *a každý skalár* $k \in \mathbf{T}$.

Příklad 7.2 *Pro libovolné dva vektorové prostory* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je lineární zobrazení* $O : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *definované předpisem* $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. *Toto zobrazení nazýváme* nulové zobrazení.

Lineární je také zobrazení $I : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ *definované předpisem* $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. *Nazýváme je* identické zobrazení.

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbf{T}^{m\times n}$ *je lineární zobrazení* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *definované předpisem* $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

Je-li $\mathbf{U}$ *vektorový prostor všech diferencovatelných reálných funkcí definovaných na* $\mathbf{R}$ *a* $\mathbf{V}$ *prostor všech reálných funkcí definovaných na* $\mathbf{R}$, *pak zobrazení* $D : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *definované předpisem* $D(f) = f'$ *je lineární.*

Úloha 7.1 *Dokažte, že složení $G \circ F$ dvou lineárních zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $G : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení z prostoru $\mathbf{U}$ do prostoru $\mathbf{W}$.*

Řešení. Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ platí

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= G(F(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = G(F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})) = \\ &= G(F(\mathbf{x})) + G(F(\mathbf{y})) = \\ &= (G \circ F)(\mathbf{x}) + (G \circ F)(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Podobně pro každý skalár $k \in \mathbf{T}$ platí

$$(G \circ F)(k\mathbf{x}) = G(F(k\mathbf{x})) = G(kF(\mathbf{x})) = kG(F(\mathbf{x})) = k(G \circ F)(\mathbf{x}).$$

□

Následující tvrzení mimo jiné ukazuje, jak můžeme zadat lineární zobrazení na konečně dimenzionálním prostoru.

Tvrzení 7.3 *Předpokládáme, že $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$ je konečně-dimenzionální. Posloupnost $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $\mathbf{U}$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ je libovolná posloupnost prvků $\mathbf{V}$. Potom platí*

- *existuje právě jedno lineární zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, pro které platí $F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{z}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$,*
- *toto zobrazení F je na celý prostor $\mathbf{V}$ právě když $\mathcal{L}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) = \mathbf{V}$,*
- *zobrazení F je prosté právě když je posloupnost $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ lineárně nezávislá,*
- *zobrazení F je vzájemně jednoznačné právě tehdy, když je posloupnost $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ báze prostoru $\mathbf{V}$.*

Důkaz. Libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i.$$

Zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ má být lineární, musí proto platit

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{z}_i.$$

Pro hodnotu $F(\mathbf{x})$ tak máme podle tohoto vyjádření jedinou možnost. Lineární zobrazení F s vlastností $F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{z}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ tak může existovat nejvýše jedno.

Zbývá dokázat, že takto definované zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je skutečně lineární. Je-li $k \in \mathbf{T}$ libovolný skalár, pak

$$k\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} k a_i \mathbf{u}_i,$$

a proto

$$F(k\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} k a_i \mathbf{z}_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{z}_i = kF(\mathbf{x}).$$

A je-li

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{u}_i$$

nějaký jiný prvek prostoru $\mathbf{U}$, pak

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\mathbf{u}_i$$

a tedy

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\mathbf{z}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{z}_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{z}_i = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y}).$$

Zobrazení F je proto lineární.

Pro důkaz druhé části budeme napřed předpokládat, že F je zobrazení na celý prostor $\mathbf{V}$. Zvolíme libovolný vektor $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$. Protože $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je zobrazení na celý prostor $\mathbf{V}$, existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ takový, že $F(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$. Protože posloupnost $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $\mathbf{U}$, můžeme vektor $\mathbf{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i.$$

Podle definice zobrazení F potom platí

$$\mathbf{z} = F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{z}_i.$$

Platí proto $\mathbf{z} \in \mathcal{L}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)$ a tedy inkluze

$$\mathbf{V} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n).$$

Protože opačná inkluze platí vždy, dostáváme rovnost $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)$.

Platí-li naopak $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)$, zvolíme libovolný prvek $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ a vyjádříme jej jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$:

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{z}_i.$$

Podle definice zobrazení F potom platí

$$F(\sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{z}_i = \mathbf{z},$$

zobrazení F je proto na celý prostor $\mathbf{V}$.

K důkazu třetí části tvrzení budeme předpokládat, že F je prosté zobrazení a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$$

pro nějaké skaláry $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{T}$. Položíme

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i \in \mathbf{U}.$$

Podle definice zobrazení F platí

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{z}_i = \mathbf{0}.$$

Zobrazení F je lineární, platí proto také $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Z prostoty zobrazení F odtud vyplývá rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Posloupnost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ je ale báze prostoru $\mathbf{U}$, je proto lineárně nezávislá. Odtud vyplývá, že $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Lineárně nezávislá je proto také posloupnost $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$.

Je-li naopak $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ lineárně nezávislá posloupnost v prostoru $\mathbf{V}$ a $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$ pro nějaké dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$, vyjádříme oba vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako lineární kombinace prvků báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{u}_i.$$

Podle definice zobrazení F pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{z}_i = F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{z}_i,$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\mathbf{z}_i = \mathbf{0}.$$

V důsledku lineární nezávislosti posloupnosti $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ pak dostáváme $a_i = b_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Zobrazení F je proto prosté.

Poslední čtvrtá část plyne bezprostředně z druhé a třetí části tvrzení. □

Následují příklady geometricky motivovaných lineárních zobrazení ve dvoudimenzionálním a třídimenzionálním reálném aritmetickém prostoru. Ve všech případech je jednoduché ověřit, že uvedená zobrazení jsou skutečně lineární.

Příklad 7.4 Rotací *o úhel* α *rozumíme zobrazení* $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, *které každý bod* $\mathbf{u} = (x, y)^T \in \mathbf{R}^2$ *otočí kolem počátku souřadnic proti směru hodinových ručiček o úhel* α. *Dá se spočítat, že v tom případě platí*

$$Q(\mathbf{u}) = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Projekce *na první osu souřadnic je zobrazení* $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definované předpisem*

$$P(\mathbf{u}) = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (x, y)^T \in \mathbf{R}^2$.

Symetrie vzhledem k první ose souřadnic *je zobrazení* $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definované předpisem*

$$S(\mathbf{u}) = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (x, y)^T \in \mathbf{R}^2$.

Příklad 7.5 Třídimenzionální rotace *kolem osy z o úhel α v kladném směru je zobrazení $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definované předpisem*

$$Q_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $(x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$.

Projekce *na rovinu xy v prostoru $\mathbf{R}^3$ je zobrazení $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definované předpisem*

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $(x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$.

Podobně můžeme také definovat symetrii vzhledem k rovině xy *jako zobrazení $R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definované předpisem*

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $(x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$.

To, že jsme v předchozích dvou příkladech vždy našli vyjádření lineárního zobrazení ve tvaru $F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A}$, není žádná náhoda. Ukážeme si teď, že *každé* lineární zobrazení mezi dvěma konečně-dimenzionálními vektorovými prostory lze vyjádřit pomocí matice. Základem je následující definice.

Definice 7.6 *Předpokládáme, že $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou dva konečně-dimenzionální vektorové prostory nad nějakým tělesem $\mathbf{T}$, posloupnost $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $\mathbf{U}$ a posloupnost $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ je báze prostoru $\mathbf{V}$. Dále předpokládáme, že $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Pro každý vektor $\mathbf{u}_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, existuje podle Úlohy 6.3 jednoznačné vyjádření vektoru $F(\mathbf{u}_j) \in \mathbf{V}$ jako lineární kombinace prvků báze $\mathcal{B}$:*

$$F(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{v}_i.$$

Matici $[F]_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nazýváme matice lineárního zobrazení F vzhledem k bázím $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

Pokud označíme $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ souřadnice vektoru $\mathbf{y}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$, pak můžeme matici lineárního zobrazení F vzhledem k bázím $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ zapsat jako

$$[F]_{\mathcal{AB}} = ([F(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{B}} \,|\, [F(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{B}} \cdots [F(\mathbf{u}_j)]_{\mathcal{B}} \cdots [F(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{B}}).$$

Všimněte si, že v j-tém sloupci matice $[F]_{\mathcal{AB}}$ jsou souřadnice obrazu $F(\mathbf{u}_j)$ j-tého vektoru $\mathbf{u}_j$ báze $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$. Matice lineárního zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ vzhledem k bázím $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ tak závisí nejen na samotném zobrazení F, ale také na zvolených bázích $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ v prostoru $\mathbf{U}$ a $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ v prostoru $\mathbf{V}$. Jedno a totéž lineární zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ má různé matice vzhledem k různým bázím prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$.

Cvičení 7.1 *Najděte matice lineárních zobrazení z Příkladů 7.4 a 7.5 vzhledem k různě zvoleným dvojicím bází v prostorech $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$.*

Tvrzení 7.7 *Předpokládáme, že $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, posloupnost $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $\mathbf{U}$, posloupnost $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ je báze prostoru $\mathbf{V}$, $[F]_{\mathcal{AB}} = (a_{ij})$ je matice zobrazení F vzhledem k bázím $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, a $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ je vektor souřadnic nějakého vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ vzhledem k bázi $\mathcal{A}$. Potom vektor $F(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}$ má vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $[F]_{\mathcal{AB}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$, tj. platí rovnost*

$$[F(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [F]_{\mathcal{AB}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}.$$

Důkaz. Označíme si vektor souřadnic $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Platí tedy

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j$$

podle Definice 6.11. Protože $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení, platí podle Definice 7.1, že

$$F(\mathbf{x}) = F(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j F(\mathbf{u}_j).$$

Každý vektor $F(\mathbf{u}_j)$ můžeme podle Definice 7.6 vyjádřit ve tvaru

$$F(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{v}_i.$$

Po dosazení do předchozí rovnosti dostaneme

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j F(\mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{v}_i).$$

Poslední výraz roznásobíme a přeuspořádáme za pomoci komutativity sčítání ve $\mathbf{V}$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\mathbf{v}_i.$$

Platí tedy

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\mathbf{v}_i.$$

To znamená, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$ se i-tá souřadnice vektoru $F(\mathbf{x})$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

což je rovněž i-tá souřadnice součinu matice $[F]_{\mathcal{AB}} = (a_{ij})$ s vektorem $(x_1, \ldots, x_n)^T = [\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$. □

Následující tvrzení je dalším, obecnějším, odůvodněním proč násobit matice podle Definice 3.4.

Tvrzení 7.8 *Předpokládáme, že $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ jsou vektorové prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$, $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $G : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení. Dále předpokládáme, že $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ je báze prostoru $\mathbf{U}$, posloupnost $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ je báze prostoru $\mathbf{V}$ a posloupnost $\mathcal{C} : \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ je báze prostoru $\mathbf{W}$. Potom platí*

$$[G \circ F]_{\mathcal{AC}} = [G]_{\mathcal{BC}}[F]_{\mathcal{AB}}.$$

Důkaz. Označíme $[G]_{\mathcal{BC}} = (a_{ij})$ a $[F]_{\mathcal{AB}} = (b_{jk})$. To znamená, že platí

$$G(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i$$

pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$, a dále

$$F(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{v}_k$$

pro každé $k = 1, 2, \ldots, p$.

Pro výpočet matice složeného zobrazení $G \circ F$ vzhledem k bázím $\mathcal{A}$: $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ a $\mathcal{C} : \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ potřebujeme najít souřadnice každého vektoru $(G \circ F)(\mathbf{u}_k)$, $k = 1, 2, \ldots p$, vzhledem k bázi $\mathcal{C} : \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Platí

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\mathbf{u}_k) &= G(F(\mathbf{u}_k)) = G(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} G(\mathbf{v}_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{jk}a_{ij}\mathbf{w}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})\mathbf{w}_i.\end{aligned}$$

To znamená, že i-tá souřadnice vektoru $(G \circ F)(\mathbf{u}_k)$ vzhledem k bázi $\mathcal{C} = \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$, tj. prvek na místě (i, k) v matici $[G \circ F]_{\mathcal{AC}}$, se rovná

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

tj. rovná se prvku na místě (i, k) v součinu matic $[G]_{\mathcal{BC}}[F]_{\mathcal{AB}}$. Protože tato rovnost platí pro libovolné $i = 1, \ldots, m$ a $k = 1, \ldots, p$, platí rovnost matic

$$[G \circ F]_{\mathcal{AC}} = [G]_{\mathcal{BC}}[F]_{\mathcal{AB}}.$$

□

Počítání s lineárními zobrazeními

Definice 7.9 *Jsou-li* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *dve vektorové prostory nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $F, G : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení, pak definujeme* součet lineárních zobrazení $F + G : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *předpisem*

- $(F + G)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$.

Dále definujeme součin prvku $k \in \mathbf{T}$ a lineárního zobrazení F *jako zobrazení* $kF : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *určené předpisem*

- $(kF)(\mathbf{x}) = kF(\mathbf{x})$ *pro libovolný vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$.

Množinu všech lineárních zobrazení z prostoru $\mathbf{U}$ *do prostoru* $\mathbf{V}$ *budeme označovat* $\mathcal{Z}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$.

Úloha 7.2 *Dokažte, že množina $\mathcal{Z}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ všech lineárních zobrazení z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{V}$ spolu s operacemi sčítání a násobení prvky tělesa $\mathbf{T}$ definovanými v Definici 7.9 je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.*

Řešení. Musíme ověřit, že množina $\mathcal{Z}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ spolu s uvedenými operacemi splňuje axiomy vektorového prostoru podle Definice 5.2.

Jako první ověříme axiomy uzavřenosti (A0) a (N0). Předpokládáme, že $F,G:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ jsou lineární zobrazení. Jsou-li $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{U}$ libovolné dva prvky prostoru $\mathbf{U}$, pak platí

$$\begin{aligned}(F+G)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}+\mathbf{y})+G(\mathbf{x}+\mathbf{y}) =\\ &= F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y})+G(\mathbf{x})+G(\mathbf{y}) =\\ &= F(\mathbf{x})+G(\mathbf{x})+F(\mathbf{y})+G(\mathbf{y}) =\\ &= (F+G)(\mathbf{x})+(F+G)(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Podobně dokážeme také platnost druhé podmínky lineárních zobrazení. Je-li $l\in\mathbf{T}$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{U}$ dostáváme

$$\begin{aligned}(F+G)(l\mathbf{x}) &= F(l\mathbf{x})+G(l\mathbf{x}) = lF(\mathbf{x})+lG(\mathbf{x}) =\\ &= l(F(\mathbf{x})+G(\mathbf{x})) = l(F+G)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Součet $F+G$ je tedy také lineární zobrazení z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{V}$ a množina $\mathcal{Z}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ tak splňuje axiom (A0).

Zcela stejně se dokáže také platnost axiomu uzavřenosti (N0). Pro libovolný skalár $k\in\mathbf{T}$ a každé dva vektory $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{U}$ platí

$$\begin{aligned}(kF)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= k(F(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = k(F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y})) =\\ &= kF(\mathbf{x})+kF(\mathbf{y}) = (kF)(\mathbf{x})+(kF)(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

a dále pro každé $l\in\mathbf{T}$ dostáváme

$$\begin{aligned}(kF)(l\mathbf{x}) &= k(F(l\mathbf{x})) = k(lF(\mathbf{x})) = (kl)F(\mathbf{x}) = (lk)F(\mathbf{x}) =\\ &= l(kF(\mathbf{x})) = l(kF)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Z ostatních axiomů vektorového prostoru si ukážeme například axiom distributivity (N4). Platí

$$\begin{aligned}k(F+G)(\mathbf{x}) &= k(F(\mathbf{x})+G(\mathbf{x})) = kF(\mathbf{x})+kG(\mathbf{x}) =\\ &= (kF)(\mathbf{x})+(kG)(\mathbf{x}) = (kF+kG)(\mathbf{x})\end{aligned}$$

pro každý vektor $\mathbf{x}\in\mathbf{U}$, zobrazení $k(F+G)$ a $kF+kG$ se proto rovnají.

Ostatní axiomy se dokážou analogicky. Nulové zobrazení $O : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je neutrální prvek vzhledem ke sčítání lineárních zobrazení, opačný prvek k zobrazení F je zobrazení $-F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ definované předpisem $(-F)(\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})$ pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. $\square$

Je-li $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ vzájemně jednoznačné zobrazení, pak existuje *inverzní zobrazení* $F^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ definované předpisem

$$F^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \quad \text{právě když} \quad F(\mathbf{u}) = \mathbf{x}.$$

Úloha 7.3 *Je-li $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ vzájemně jednoznačné lineární zobrazení, pak inverzní zobrazení $F^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je také lineární zobrazení.*

Řešení. Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ libovolné dva vektory, pak v důsledku vzájemné jednoznačnosti zobrazení F existují jednoznačně určené vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$, pro které platí $F(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ a $F(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. V důsledku linearity zobrazení F pak také platí $F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}$. To znamená, že $F^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$, $F^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$ a $F^{-1}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{u}+\mathbf{v}$. Proto

$$F^{-1}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = F^{-1}(\mathbf{x}) + F^{-1}(\mathbf{y}).$$

Z linearity zobrazení F plyne také $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u}) = k\mathbf{x}$, proto $F^{-1}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{u}$. Proto také

$$F^{-1}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{u} = kF^{-1}(\mathbf{x}).$$

Inverzní zobrazení $F^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je tak opravdu lineární. $\square$

Tvrzení 7.10 *Je-li $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ vzájemně jednoznačné lineární zobrazení, $\mathbf{U}$ je konečně-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, a posloupnosti $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou dvě báze prostoru $\mathbf{U}$, pak platí*

$$[F^{-1}]_{\mathcal{BA}} = [F]^{-1}_{\mathcal{AB}}.$$

Důkaz. Protože $F^{-1} \circ F = I$, identické zobrazení na prostoru $\mathbf{U}$, platí podle Tvrzení 7.8, že

$$[I]_{\mathcal{AA}} = [F^{-1} \circ F]_{\mathcal{AA}} = [F^{-1}]_{\mathcal{BA}}[F]_{\mathcal{AB}}.$$

Zbývá dokázat, že pro identické zobrazení platí $[I]_{\mathcal{AA}} = \mathbf{I}_n$. To je ale důsledkem rovnosti $I(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Proto platí

$$[F^{-1}]_{\mathcal{BA}}[F]_{\mathcal{AB}} = \mathbf{I}_n,$$

což podle Tvrzení 3.11 stačí k důkazu, že platí rovnost

$$[F^{-1}]_{\mathcal{BA}} = [F]^{-1}_{\mathcal{AB}}.$$

□

Pokud uvažujeme pouze lineární zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně-dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathbf{U}$, obvykle zvolíme jen jednu bázi $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a počítáme s maticí $[F]_{\mathcal{AA}}$. Tuto matici nazýváme *matice lineárního zobrazení F vzhledem k bázi $\mathcal{A}$* a označujeme ji $[F]_{\mathcal{A}}$.

Důsledek 7.11 *Jsou-li $F, G : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ dvě lineární zobrazení na konečně-dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ a $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze $\mathbf{U}$, pak platí*

$$[G \circ F]_{\mathcal{A}} = [G]_{\mathcal{A}}[F]_{\mathcal{A}}.$$

Je-li lineární zobrazení F navíc vzájemně jednoznačné, pak platí také

$$[F^{-1}]_{\mathcal{A}} = [F]^{-1}_{\mathcal{A}}.$$

Pomocí Důsledku 7.11 můžeme vypočítat matici osové symetrie v prostoru $\mathbf{R}^2$ vzhledem ke standardní bázi, je-li osou symetrie libovolná přímka procházející počátkem, a také matici projekce na libovolnou přímku procházející počátkem vzhledem ke standardní bázi. Ukážeme si to v následujících úlohách.

Úloha 7.4 *Najděte matici osové symetrie v reálné rovině $\mathbf{R}^2$ vzhledem ke standardní bázi, prochází-li osa symetrie počátkem a vektorem $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ pro nějaký úhel α.*

Řešení. V Příkladu 7.4 jsme našli vyjádření rotace kolem počátku o úhel α v kladném směru. Tato rotace Q_α zobrazuje vektor $\mathbf{u} = (x, y)^T$ do vektoru

$$Q_\alpha(\mathbf{u}) = Q_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Protože rotace Q_α zobrazuje první vektor standardní báze $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ do bodu $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T = \cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2$ a druhý vektor standardní báze $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ do bodu $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T = -\sin\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{e}_2$, je matice

$$[Q_\alpha]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

maticí rotace Q_α vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E} : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ v reálné rovině $\mathbf{R}^2$.

Ve stejném Příkladu 7.4 jsme také našli vyjádření osové symetrie S určené první osou souřadnic

$$S(\mathbf{u}) = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě rotace ověříme, že matice $[S]_\mathcal{E}$ této symetrie vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ se rovná

$$[S]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jak z těchto dvou matic získáme matici osové symetrie určené osou procházející počátkem a vektorem $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ vzhledem ke standardní bázi? Napřed otočením $Q_{-\alpha}$, tj. o úhel α po směru hodinových ručiček, dostaneme vektor $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ do bodu $(1,0)^T = \mathbf{e}_1$. Toto otočení má vzhledem ke standardní bázi matici

$$[Q_{-\alpha}]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Tímto otočením tak přemístíme osu symetrie procházející počátkem a vektorem $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ do první osy souřadnic. Poté uděláme osovou symetrii S vzhledem k první ose souřadnic a nakonec výsledek otočíme zpátky o úhel α proti směru hodinových ručiček. Matice těchto dvou zobrazení vzhledem ke standardní bázi už známe.

Matice složeného zobrazení $Q_\alpha \circ S \circ Q_{-\alpha}$ vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ se proto podle Důsledku 7.11 rovná

$$\begin{aligned}
&[Q_\alpha \circ S \circ Q_{-\alpha}]_\mathcal{E} = [Q_\alpha]_\mathcal{E}[S]_\mathcal{E}[Q_{-\alpha}]_\mathcal{E} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Obraz vektoru $(x,y)^T$ v osové symetrii určené osou procházející počátkem a vektorem $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ má proto vzhledem ke standardní bázi souřadnice

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \\ x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 7.5 *Najděte matici vzhledem ke standardní bázi pro projekci v reálné rovině* $\mathbf{R}^2$ *na přímku procházející počátkem a vektorem* $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ *pro nějaký úhel* α.

Řešení. Budeme postupovat stejně jako v předchozím případě. Napřed přesuneme pomocí otočení $Q_{-\alpha}$ o úhel α po směru hodinových ručiček přímku, na kterou projektujeme, do první osy souřadnic. Matici $[Q_{-\alpha}]_{\mathcal{E}}$ tohoto otočení vzhledem ke standardní bázi jsme našli v předchozí úloze:

$$[Q_{-\alpha}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Z Příkladu 7.4 známe vyjádření projekce P na první osu souřadnic

$$P(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (x, y)^T$. Odtud plyne, že matice $[P]_{\mathcal{E}}$ této projekce vzhledem ke standardní bázi se rovná

$$[P]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Projekce na přímku procházející počátkem a vektorem $(\sin\alpha, \cos\alpha)^T$ se rovná složení $Q_\alpha \circ S \circ Q_{-\alpha}$. Její matice vzhledem ke standardní bázi se proto rovná

$$\begin{aligned}
&[Q_\alpha \circ S \circ Q_{-\alpha}]_{\mathcal{E}} = [Q_\alpha]_{\mathcal{E}}[S]_{\mathcal{E}}[Q_{-\alpha}]_{\mathcal{E}} = \\
= &\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \\
= &\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Projekce vektoru $(x, y)^T$ na přímku procházející počátkem a vektorem $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ má tak vzhledem ke standardní bázi souřadnice

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos^2\alpha + y\cos\alpha\sin\alpha \\ x\cos\alpha\sin\alpha + y\sin^2\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Podobně můžeme spočítat také matice rotací kolem dalších os v třídimenzionálním prostoru $\mathbf{R}^3$.

Úloha 7.6 *Najděte matice vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ pro rotace kolem první a druhé osy souřadnic v reálném prostoru $\mathbf{R}^3$.*

Řešení. Začneme rotací kolem první osy souřadnic. Podobně jako v předchozích dvou úlohách nejdříve "otočíme" prostor $\mathbf{R}^3$ tak, aby se první osa souřadnic přesunula na místo třetí souřadné osy, potom uděláme rotaci kolem třetí souřadné osy o úhel α v kladném směru, jak jsme se už naučili v Příkladu 7.5. A nakonec "otočíme" prostor zpět do původní polohy. Pro všechna uvedená lineární zobrazení budeme hledat matice vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$.

Při otočení R, které převede první osu souřadnic do třetí souřadné osy, se zobrazí vektor $\mathbf{e}_1$ do vektoru $\mathbf{e}_3$, vektor $\mathbf{e}_3$ do vektoru $\mathbf{e}_2$ a vektor $\mathbf{e}_2$ do vektoru $\mathbf{e}_1$. Matice lineárního zobrazení R vzhledem ke standardní bázi se proto rovná

$$[R]_{\mathcal{E}} = ([R(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} \,|\, [R(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}} \,|\, [R(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inverzní otočení R^{-1} zobrazuje vektor $\mathbf{e}_3$ do vektoru $\mathbf{e}_1$, vektor $\mathbf{e}_2$ do vektoru $\mathbf{e}_3$ a vektor $\mathbf{e}_1$ do vektoru $\mathbf{e}_2$. Jeho matice je tedy

$$[R^{-1}]_{\mathcal{E}} = ([R^{-1}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} \,|\, [R^{-1}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}} \,|\, [R^{-1}(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíme, že součin obou matic se rovná $\mathbf{I}_3$, jak má platit podle druhé části Důsledku 7.11.

V Příkladu 7.5 jsme našli matici rotace Q_z vzhledem ke standardní bázi kolem třetí souřadné osy:

$$[Q_z]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice rotace Q_x kolem první souřadné osy vzhledem ke standardní bázi se proto podle Důsledku 7.11 rovná

$$\begin{aligned} &[Q_x]_{\mathcal{E}} = [R^{-1} \circ Q_z \circ R]_{\mathcal{E}} = [R^{-1}]_{\mathcal{E}}[Q_z]_{\mathcal{E}}[R]_{\mathcal{E}} = \\ = &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet matice rotace kolem druhé souřadné osy napřed otočíme prostor $\mathbf{R}^3$ tak, aby se druhá souřadná osa přemístila na místo třetí souřadné osy. K tomu můžeme použít otočení R^{-1}. Poté uděláme rotaci Q_z kolem třetí souřadné osy, a nakonec pomocí otočení R přemístíme zpět druhou souřadnou osu na původní místo. Platí tak

$$[Q_y]_{\mathcal{E}} = [R \circ Q_z \circ R^{-1}]_{\mathcal{E}} = [R]_{\mathcal{E}}[Q_z]_{\mathcal{E}}[R^{-1}]_{\mathcal{E}} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Izomorfizmus prostorů

Definice 7.12 *Vzájemně jednoznačné lineární zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ se nazývá* izomorfizmus *prostorů* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$. *Prostory* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$ *se nazývají* izomorfní, *pokud existuje izomorfizmus $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$.*

Úloha 7.7 *Dokažte, že aritmetický reálný prostor $\mathbf{R}^{n+1}$ a prostor $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše n jsou izomorfní.*

Řešení. Potřebujeme definovat vzájemně jednoznačné lineární zobrazení $F : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}_{\leq n}[x]$. Každému vektoru $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{R}^{n+1}$ přiřadíme polynom

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbf{R}_{\leq n}[x].$$

Napřed ověříme, že zobrazení F je lineární. Je-li $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_n)$ další vektor z prostoru $\mathbf{R}^{n+1}$, pak platí

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b}).$$

Je-li k libovolné reálné číslo, pak

$$F(k\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{n}(ka_i)x^i = k\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = kF(\mathbf{a}).$$

Zobrazení F je tak skutečně lineární.

Lineární zobrazení F zobrazuje standardní bázi $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ do posloupnosti polynomů $1, x, x^2, \ldots, x^n$, která je lineárně nezávislá (proč?). Snadno se ověří, že také generuje celý prostor $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$. Je to tedy báze prostoru $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$. Podle poslední části Tvrzení 7.3 je lineární zobrazení F vzájemně jednoznačné a proto je to izomorfizmus prostorů $\mathbf{R}^{n+1}$ a $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$. $\square$

Izomorfní prostory jsou z pohledu matematika stejné. Počítá se v nich zcela stejně, pouze prvek $\mathbf{a}$ v jednom prostoru nazýváme $F(\mathbf{a})$ ve druhém prostoru. Oba prostory $\mathbf{R}^{n+1}$ a $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$ mají stejnou dimenzi rovnou $n+1$. Skutečnost, že jsou izomorfní, je velmi speciálním případem následujícího tvrzení.

Tvrzení 7.13 *Každý vektorový prostor* $\mathbf{U}$ *dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je izomorfní s aritmetickým vektorovým prostorem* $\mathbf{T}^n$ *dimenze* n.

Důkaz. V prostoru $\mathbf{U}$ zvolíme libovolnou bázi $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Je-li nyní $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ libovolný prvek prostoru $\mathbf{U}$, pak definujeme

$$F(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n,$$

kde $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathcal{A}$. Podle Cvičení 6.9 je zobrazení F lineární. Protože navíc zobrazuje bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathbf{U}$ do standardní báze prostoru $\mathbf{T}^n$, je to podle Tvrzení 7.3 izomorfizmus vektorových prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{T}^n$. $\square$

Důsledek 7.14 *Dva konečně-dimenzionální vektorové prostory nad stejným tělesem* $\mathbf{T}$ *jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi* n.

Důkaz. Mají-li dva prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ stejnou dimenzi n, existují podle předchozího Tvrzení 7.13 izomorfizmy $F : \mathbf{U} \to \mathbf{T}^n$ a $G : \mathbf{V} \to \mathbf{T}^n$. Složené zobrazení $G^{-1} \circ F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární podle Úloh 7.1 a 7.3. Protože je složením dvou vzájemně jednoznačných zobrazení, je také vzájemně jednoznačné a tedy izomorfizmus prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$.

Je-li naopak $H : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ izomorfizmus mezi prostory $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, zvolíme v $\mathbf{X}$ libovolnou bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$. Podle poslední části tvrzení 7.3 je posloupnost

$H(\mathbf{x}_1), \ldots, H(\mathbf{x}_m)$ potom báze v prostoru $\mathbf{Y}$ a proto dim $\mathbf{X} = m =$ dim $\mathbf{Y}$.
□

Tvrzení 7.13 říká, že každý vektorový prostor $\mathbf{U}$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ je v podstatě stejný jako aritmetický vektorový prostor $\mathbf{T}^n$. Proč se tedy zabývat obecnými vektorovými prostory? Nestačí zkoumat pouze ty aritmetické? Jeden důvod spočívá v tom, že izomorfizmus, který jsme v důkazu Tvrzení 7.13 sestrojili, závisí na volbě báze prostoru $\mathbf{U}$. Různé volby báze určují různé izomorfizmy. Obecně neexistuje žádný "přirozený" izomorfizmus mezi prostorem $\mathbf{U}$ a aritmetickým prostorem $\mathbf{T}^n$ téže dimenze. Zkoumat pouze aritmetické vektorové prostory znamená vlastně zkoumat prostory s pevně zvolenou bází (standardní). A jak jsme viděli při řešení Úlohy 7.4, různá lineární zobrazení je lépe zkoumat vzhledem k různě zvoleným bázím, které nejlépe odrážejí vlastnosti těchto zobrazení.

V praxi to obvykle vypadá tak, že při řešení konkrétních úloh zvolíme vhodnou bázi a potom počítáme s maticemi a vektory souřadnic vzhledem ke zvolené bázi. Pokud ale odhadujeme, jak by mohlo řešení úlohy vypadat, je lépe uvažovat bez pevně zvolené báze.

Změna báze

Nyní se budeme zabývat otázkou, jak změna báze změní matici lineárního zobrazení. Klíčem k odpovědi na tuto tázku jsou Tvrzení 7.8 a Důsledek 7.11. Jsou-li $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ dvě báze vektorového prostoru $\mathbf{U}$ a $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární zobrazení, pak podle Tvrzení 7.8 platí

$$[F]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [I \circ F \circ I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{A}\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}},$$

kde $I : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je identické lineární zobrazení. Použijeme-li označení zavedené před Důsledkem 7.11, můžeme poslední formulku zapsat ve tvaru

$$[F]_{\mathcal{B}} = [I \circ F \circ I]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}.$$

Pokud tedy známe matici lineárního zobrazení vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ a chceme spočítat matici téhož zobrazení vzhledem k bázi $\mathcal{B}$, potřebujeme znát matici $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ identického zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ a $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Stejně tak potřebujeme znát matici $[I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ identického zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Podle Tvrzení 7.8 platí

$$[I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = [I \circ I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_n,$$

tj. matice $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ a $[I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ jsou vzájemně inverzní. Známe-li jednu, můžeme dopočítat druhou. Protože $I(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$, platí

$$[I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = ([\mathbf{v}_1]_{\mathcal{A}} \,|\, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{A}} \cdots [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{A}}).$$

To znamená, že j-tý sloupec matice $[I]_{\mathcal{BA}} = (a_{ij})$ obsahuje koeficienty lineární kombinace

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_i$$

vyjadřující vektor $\mathbf{v}_j$ jako lineární kombinaci prvků báze $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Definice 7.15 *Jsou-li $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ dvě báze vektorového prostoru $\mathbf{U}$, pak matici $[I]_{\mathcal{BA}}$ nazýváme* matice přechodu *od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$.*

Jednoznačně určené lineární zobrazení $T : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ splňující

$$T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{v}_j$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ (proč existuje?!) nazýváme operátor přechodu *od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$.*

Úloha 7.8 *V prostoru $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2 uvažujeme dvě báze $\mathcal{A} : 1, x, x^2$ a $\mathcal{B} : 1, 1+x, 1+x+x^2$. Najděte matici přechodu $\mathbf{P}$ od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{A}$. Najděte souřadnice polynomu $q(x) = 3 + 2x + 4x^2$ vzhledem k oběma bázím $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.*

Řešení. Především je třeba ověřit, že obě posloupnosti $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou báze prostoru $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$. To si udělejte sami. Abychom našli matici přechodu $\mathbf{P} = [I]_{\mathcal{AB}}$ od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{A}$, musíme najít vyjádření každého z vektorů báze $\mathcal{A}$ jako lineární kombinace vektorů báze $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
1 &= 1(1) + 0(1+x) + 0(1+x+x^2)\\
x &= -1(1) + 1(1+x) + 0(1+x+x^2)\\
x^2 &= 0(1) - 1(1+x) + 1(1+x+x^2).
\end{aligned}$$

Proto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Souřadnice polynomu $q(x) = 3 + 2x + 4x^2$ vzhledem k bázi $\mathcal{A} : 1, x, x^2$ jsou $(3, 2, 4)^T$. Podle Tvrzení 7.7 dostáváme

$$[q]_{\mathcal{B}} = [I(q)]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{AB}}[q]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Souřadnice polynomu $q(x)$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ jsou tedy $(1, -2, 4)^T$.

Správnost výpočtu si můžeme ověřit zkouškou

$$1(1) - 2(1 + x) + 4(1 + x + x^2) = 3 + 2x + 4x^2 = q(x).$$

□

Vzhledem k důležitosti matice přechodu si ukážeme ještě další vyjádření této matice pomocí matice operátoru přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$.

Úloha 7.9 *Předpokládáme, že* $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *a* $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *jsou dvě báze vektorového prostoru* $\mathbf{U}$, *a že* $T : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ *je operátor přechodu od báze* $\mathcal{A}$ *k bázi* $\mathcal{B}$. *Dokažte, že platí*

$$[I]_{\mathcal{BA}} = [T]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{B}}.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{AA}} &= ([T(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{A}} \,|\, [T(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{A}} \cdots [T(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{A}}) = \\ &= ([\mathbf{v}_1]_{\mathcal{A}} \,|\, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{A}} \cdots [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{A}}) = \\ &= [I]_{\mathcal{BA}}. \end{aligned}$$

Abychom dokázali rovnost $[I]_{\mathcal{BA}} = [T]_{\mathcal{B}}$, vyjádříme prvky báze $\mathcal{B}$ jako lineární kombinace prvků báze $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_i$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$. Pak platí také

$$T(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{v}_i$$

Proto rovněž

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{BB}} &= ([T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}} \,|\, [T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{\mathcal{B}}) = \\ &= ([\mathbf{v}_1]_{\mathcal{A}} \,|\, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{A}} \cdots [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{A}}) = \\ &= [I]_{\mathcal{BA}}. \end{aligned}$$

□

Diskusi předcházející Definici 7.15 můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

Tvrzení 7.16 *Je-li $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární zobrazení, $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ dvě báze vektorového prostoru $\mathbf{U}$, a $\mathbf{P} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ matice přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$, pak platí*

$$[F]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^{-1}[F]_{\mathcal{A}}\mathbf{P}$$

a také

$$\mathbf{P}[F]_{\mathcal{B}}\mathbf{P}^{-1} = [F]_{\mathcal{A}},$$

kde $\mathbf{P}^{-1} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ je matice přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{A}$. □

Obě formulky v Tvrzení 7.16 velmi připomínají výpočty v Úlohách 7.4, 7.5 a 7.6. Také tam jsme vždy vypočítali matici příslušného zobrazení tak, že jsme známou matici jiného zobrazení vynásobili zprava nějakou regulární maticí $\mathbf{Q}$ a zleva maticí k ní inverzní $\mathbf{Q}^{-1}$. To není žádná náhoda, naopak je v podstatě věci, že řešení uvedených úloh probíhalo tak jak probíhalo. Celá věc spočívá v tom, že vzhledem ke vhodně zvolené bázi umíme všechna lineární zobrazení popsat už známými maticemi. Potom pouze vypočítáme matice příslušných zobrazení vzhledem ke standardní bázi.

Jiné řešení Úlohy 7.4. Označíme vektory $\mathbf{b}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ a $\mathbf{b}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$. Posloupnost $\mathcal{B} : \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ je báze prostoru $\mathbf{R}^2$. Důležité je, že vektory $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$ jsou navzájem kolmé a oba mají délku 1. Mají navzájem stejnou polohu jako vektory standardní báze $\mathcal{E} : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Známe také matici osové symetrie S určené osou procházející počátkem a vektorem $\mathbf{b}_1$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$, neboť osa symetrie je první souřadnou osou. Platí proto

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zbývá najít matici přechodu $[I]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ od báze $\mathcal{B}$ ke standardní bázi $\mathcal{E}$ nebo k ní inverzní matici $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{B}$ a potom použít Tvrzení 7.16. Snazší je najít matici $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ přechodu od standardní báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{B}$, protože vektory báze $\mathcal{B}$ máme zadané pomocí souřadnic vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$. Platí proto

$$[I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a přímým výpočtem najdeme

$$[I]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Podle Tvrzení 7.16 pak platí

$$\begin{aligned}
[S]_{\mathcal{E}} &= [I]^{-1}_{\mathcal{E}\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Všimněte si, že zobrazení $Q_{-\alpha}$ použité při prvním řešení Úlohy 7.4 je operátor přechodu od báze $\mathcal{B}$ ke standardní bázi $\mathcal{E}$ a v souladu s Úlohou 7.9 platí $[Q_{-\alpha}]_{\mathcal{E}} = [Q_{-\alpha}]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. □

Stejné matice přechodu můžeme použít také k jinému řešení Úlohy 7.5.

Jiné řešení Úlohy 7.6. Kromě standardní báze $\mathcal{E} : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ budeme v tomto případě uvažovat ještě bázi $\mathcal{C} : \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$ prostoru $\mathbf{R}^3$. Vzhledem k této bázi umíme napsat matici rotace Q kolem třetí souřadné osy, tj. kolem osy určené počátkem souřadnic a vektorem $\mathbf{e}_1$:

$$[Q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbývá najít matici přechodu $[I]_{\mathcal{E}\mathcal{C}}$ od báze $\mathcal{C}$ k bázi $\mathcal{E}$ nebo k ní inverzní matici $[I]_{\mathcal{C}\mathcal{E}}$ přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{C}$. Také v tomto případě je jednodušší najít matici $[I]_{\mathcal{C}\mathcal{E}}$, neboť známe souřadnice prvků báze $\mathcal{C}$ vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$. Proto

$$[I]_{\mathcal{C}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dopočítáme matici $[I]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = [I]^{-1}_{\mathcal{C}\mathcal{E}}$:

$$[I]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podle Tvrzení 7.16 pak platí

$$\begin{aligned}
[Q]_{\mathcal{E}} &= [I]_{\mathcal{C}\mathcal{E}}[Q]_{\mathcal{C}}[I]_{\mathcal{E}\mathcal{C}} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Také v tomto případě je zobrazení R, které jsme použili při prvním řešení, operátor přechodu od báze $\mathcal{C}$ k bázi $\mathcal{E}$. □

Podobně můžeme také spočítat matici otočení kolem druhé souřadné osy vzhledem ke standardní bázi. Druhá řešení jsou jednodušší díky tomu, že jsme si místo standardní báze vždy zvolili nějakou jinou bázi, která byla pro řešení úlohy vhodnější než standardní báze. Mohli jsme pak snadno najít matici příslušného zobrazení vzhledem k této jiné bázi. Pak už jenom stačilo najít příslušnou matici přechodu a vypočítat matici zobrazení vzhledem ke standardní bázi. Skutečnost, že námi zvolené báze jsou pro vyjádření matice daného zobrazení vhodnější než standardní báze, je vidět z toho, že vzhledem ke zvolené bázi má dané zobrazení jednodušší matici než vzhledem ke standardní bázi.

Podobně bychom také mohli najít matice vzhledem ke standardní bázi pro projekce na obecnou rovinu nebo pro symetrie určené obecnou rovinou v prostoru $\mathbf{R}^3$. Zvolili bychom vhodnou bázi prostoru $\mathbf{R}^3$ závisející na rovině projekce nebo symetrie, vzhledem k této bázi bychom našli matici příslušného zobrazení ve stejném tvaru jako jako jsme to udělali v případě speciálně zvolené roviny v Příkladu 7.5. Potom stačí už jenom najít matici přechodu od nově zvolené báze ke standardní bázi a vypočítat matici příslušného zobrazení vzhledem ke standardní bázi. Také v tomto případě bude matice vzhledem ke standardní bázi složitější než matice stejného zobrazení vzhledem ke vhodně zvolené jiné bázi.

Problém, jak moc lze matici lineárního zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ zjednodušit volbou vhodné báze prostoru $\mathbf{U}$, je složitý a pro obecná lineární zobrazení je vyřešený pouze pro prostory nad speciálními tělesy, například nad komplexními čísly. Řekneme si o tom více v jedné z pozdějších kapitol. Pokud uvažujeme pouze speciální lineární zobrazení, například zobrazení, která v prostorech nad reálnými čísly zachovávají úhly, můžeme najít vhodné báze mnohem snadněji. Také o tom si řekneme více v jedné z pozdějších kapitol.

V této kapitole si ukážeme pouze první a poměrně jednoduchý krok v tomto směru.

Invariantní podprostory

Definice 7.17 *Předpokládáme, že* $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ *je lineární zobrazení na vektorovém prostoru* $\mathbf{U}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Podprostor* $\mathbf{X}$ *prostoru* $\mathbf{U}$ *nazýváme* invariantní podprostor *zobrazení F, jestliže $F(\mathbf{x}) \in \mathbf{X}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ (nebo jinak řečeno, $F(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$).*

Cvičení 7.2 *Lineární zobrazení $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ má vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E} : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ matici*

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Definujeme podprostor $\mathbf{X} = \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \subseteq \mathbf{R}^3$, kde vektor $\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0)^T$ a $\mathbf{x}_2 = (-1, 2, -1)^T$. Dokažte, že $\mathbf{X}$ je invariantní podprostor lineárního zobrazení F.

Je-li $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}$ invariantní podprostor lineárního zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, pak můžeme zúžit definiční obor zobrazení F na podprostor $\mathbf{X}$. Takto zúžené zobrazení $F_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ je lineární zobrazení na prostoru $\mathbf{X}$. Nazýváme jej *restrikce* zobrazení F na invariantní podprostor $\mathbf{X}$.

Cvičení 7.3 *Pro lineární zobrazení F ze Cvičení 7.2 a tam definovaný invariantní podprostor zobrazení F najděte matici restrikce $F_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ prostoru $\mathbf{X}$.*

Existence invariantního podprostoru lineárního zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ umožňuje najít bázi prostoru $\mathbf{U}$, vzhledem ke které má zobrazení F relativně jednoduší matici.

Tvrzení 7.18 *Předpokládáme, že $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je lineární zobrazení na prostoru $\mathbf{U}$ konečné dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$. Dále předpokládáme, že $\mathbf{X}$ je invarinatní podprostor zobrazení F a $\dim \mathbf{X} = r$. Potom existuje báze $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathbf{U}$ taková, že pro matici $[F]_{\mathcal{A}}$ zobrazení F vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ platí*

$$[F]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu r (a tedy $\mathbf{B}$ má typ $r \times (n-r)$, nulová matice $\mathbf{0}$ má typ $(n-r) \times r$ a $\mathbf{C}$ je čtvercová matice řádu $n-r$).

Důkaz. Zvolíme bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ v podprostoru $\mathbf{X}$ a doplníme ji podle Tvrzení 6.7 do báze $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ celého prostoru $\mathbf{U}$. Protože pro každé

$j = 1, \dots, r$ platí $\mathbf{u}_j \in \mathbf{X}$, dostáváme tak $F(\mathbf{u}_j) \in \mathbf{X}$, neboť $\mathbf{X}$ je invariantní podprostor zobrazení F. Proto

$$F(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\mathbf{u}_i$$

pro $j = 1, \dots, r$. To znamená, že v matici $[F]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$ zobrazení F vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ jsou všechny prvky $a_{ij} = 0$ pokud $j = 1, \dots, r$ a současně $i = r+1, \dots, n$. $\square$

Podobně dokážeme i následující tvrzení.

Tvrzení 7.19 *Předpokládáme, že $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je lineární zobrazení na prostoru $\mathbf{U}$ konečné dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$. Dále předpokládáme, že $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou invarinatní podprostory zobrazení F, $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ a $\dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{Y} = n$. Potom existuje báze $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathbf{U}$ taková, že pro matici $[F]_{\mathcal{A}}$ zobrazení F vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ platí*

$$[F]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu r (a tedy $\mathbf{C}$ je čtvercová matice řádu $n-r$).

Důkaz. Označíme $r = \dim \mathbf{X}$. Potom $\dim \mathbf{Y} = n - r$. Zvolíme bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ v podprostoru $\mathbf{X}$ a bázi $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ v podprostoru $\mathbf{Y}$. Díky předpokladu $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ je posloupnost $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislá (proč?) a tedy podle Tvrzení 6.9 je to báze prostoru $\mathbf{U}$. Protože $F(\mathbf{u}_j) \in \mathbf{X}$ pro každé $j = 1, \dots, r$, plyne odtud, že

$$F(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\mathbf{u}_i$$

pro $j = 1, \dots, r$. To znamená, že v matici $[F]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$ zobrazení F vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ jsou všechny prvky $a_{ij} = 0$ pokud $j = 1, \dots, r$ a současně $i = r+1, \dots, n$.

Stejně tak je $\mathbf{u}_j \in \mathbf{Y}$ pro $j = r+1, \dots, n$, a protože je $\mathbf{Y}$ invariantní podprostor zobrazení F, platí také $F(\mathbf{u}_j) \in \mathbf{Y}$ pro $j = r+1, \dots, n$. To znamená, že

$$F(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_i$$

pro $j = r+1, \dots, n$. V matici $[F]_{\mathcal{A}} = (a_{ij})$ proto platí také $a_{ij} = 0$ pokud $j = r+1, \dots, n$ a současně $i = 1, \dots, r$. $\square$

Hledání invariantních podprostorů lineárního zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je hlavní nástroj pro zkoumání vlastností tohoto operátoru.

Soustava lineárních rovnic jako lineární zobrazení

Vzájemný vztah mezi obecným a konkrétním pohledem na lineární úlohy si ukážeme na příkladu soustav lineárních rovnic. Vektorový zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$ je

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky v tělese $\mathbf{T}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je neznámý vektor a $\mathbf{b} \in \mathbf{T}^m$ je vektor pravých stran. Předpis $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, který každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ přiřazuje vektor $\mathbf{Ax} \in \mathbf{T}^m$, definuje lineární zobrazení $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$.

Při řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ můžeme postupovat tak, že najdeme všechna řešení příslušné homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ a potom nějaké konkrétní řešení $\mathbf{p} \in \mathbf{T}^n$ nehomogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Obecné řešení nehomogenní soustavy pak dostaneme tak, že k vektoru $\mathbf{p}$ přičteme obecné řešení homogenní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ — viz Věta 2.7.

Podobně můžeme vyjádřit obecné řešení *operátorové rovnice*

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

kde $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je nějaké lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ konečné dimenze, $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ je nějaký vektor, a hledáme všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, pro které platí uvedená rovnost. Abychom ukázali, že množina všech řešení obecné operátorové rovnice má stejné vlastnosti jako množina všech řešení soustavy lineárních rovnic, zavedeme si následující definici.

Definice 7.20 *Je-li $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ nad stejným tělesem $\mathbf{T}$, pak definujeme* nulový prostor *nebo také* jádro *zobrazení F jako množinu*

$$\mathrm{Ker}\,(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{U},$$

a dále obor hodnot *nebo také* obraz *zobrazení F jako množinu*

$$\mathrm{Im}\,(F) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{V} : \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \ \text{ pro nějaké } \ \mathbf{x} \in \mathbf{U}\} \subseteq \mathbf{V}.$$

Cvičení 7.4 *Dokažte, že pro každé lineární zobrazení $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je nulový prostor $\mathrm{Ker}\,(F)$ podprostor prostoru $\mathbf{U}$ a obor hodnot $\mathrm{Im}\,(F)$ je podprostor $\mathbf{V}$.*

Tvrzení 7.21 *Předpokládáme, že* $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení a* $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\,(F)$. *Je-li* $\mathbf{z}$ *nějaké řešení operátorové rovnice* $F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *pak můžeme jakékoliv řešení* $\mathbf{u}$ *této rovnice vyjádřit ve tvaru* $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{v}$, *kde* $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\,(F)$.

Naopak, pro každý vektor $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{v}$, *kde* $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\,(F)$, *platí* $F(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$.

Důkaz. Je-li $F(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$, pak vzhledem k tomu, že také $F(\mathbf{z}) = \mathbf{b}$, platí

$$F(\mathbf{u} - \mathbf{z}) = F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{z}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

tj. vektor $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{z} \in \mathrm{Ker}\,(F)$. Platí $\mathbf{u} = \mathbf{z} + (\mathbf{u} - \mathbf{z}) = \mathbf{z} + \mathbf{v}$.

Naopak, pokud $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\,(F)$, pak dostáváme

$$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{z} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{z}) + F(\mathbf{v}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

□

Důkaz Tvrzení 7.21 je mnohem jednodušší než důkaz stejné vlastnosti množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic, který jsme uvedli při důkazu Věty 2.7.

Definice 7.22 *Je-li* $\mathbf{P}$ *podprostor vektorového prostoru* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{z} \in \mathbf{U}$, *pak množinu*

$$\mathbf{z} + \mathbf{P} = \{\mathbf{z} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbf{P}\}$$

nazýváme afinní množina *v prostoru* $\mathbf{U}$.

Podprostory vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$ jsou přímky, roviny. . . , které procházejí počátkem. Afinní množiny tak popisují *všechny* přímky, roviny, atd. v prostoru $\mathbf{R}^n$.

Předchozí Tvrzení 7.21 tak říká, že množina všech řešení operátorové rovnice $F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, kde $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení, je afinní množina v prostoru $\mathbf{U}$. Speciálně platí, že množina všech řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s koeficienty z tělesa $\mathbf{T}$, jejíž matice $\mathbf{A}$ je typu $m \times n$, je afinní množina v aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$.

Naopak můžeme také z vlastností matic získat obecné poznatky o lineárních zobrazeních. Tak například obecná formulace vlastnosti matic z Věty 6.18 je následující.

Věta 7.23 *Je-li* $\mathbf{U}$ *vektorový prostor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $F : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení, pak platí*

$$\dim \mathrm{Ker}\,(F) + \dim \mathrm{Im}\,(F) = \dim \mathbf{U}.$$

Důkaz. Protože jádro $\mathrm{Ker}\,(F)$ je podprostor prostoru $\mathbf{U}$, dostáváme z Věty 6.10 $\dim \mathrm{Ker}\,(F) \leq \dim \mathbf{U} = n$. Libovolnou bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ podprostoru $\mathrm{Ker}\,(F)$ můžeme doplnit do báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathbf{U}$. Dokážeme, že posloupnost $F(\mathbf{u}_{r+1}), \ldots, F(\mathbf{u}_n)$ je báze obrazu $\mathrm{Im}\,(F)$ lineárního zobrazení F.

Je-li $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,(F)$, pak existuje prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, pro který platí $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Protože je $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ báze prostoru $\mathbf{U}$, existuje vyjádření

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$$

vektoru $\mathbf{x}$ jako lineární kombinace prvků této báze. Protože je F lineární zobrazení, platí

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) = F(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(\mathbf{u}_i).$$

Protože vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathrm{Ker}\,(F)$, tj. $F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ pro $i = 1, \ldots, r$, dostáváme

$$\mathbf{y} = \sum_{i=r+1}^{n} a_i F(\mathbf{u}_i).$$

Posloupnost $F(\mathbf{u}_{r+1}), \ldots, F(\mathbf{u}_n)$ proto generuje prostor $\mathrm{Im}\,(F)$.

Abychom dokázali, že je také lineárně nezávislá, budeme předpokládat, že

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}.$$

Protože je F lineární zobrazení, platí

$$\mathbf{0} = \sum_{i=r+1}^{n} b_i F(\mathbf{u}_i) = F(\sum_{i=r+1}^{n} b_i \mathbf{u}_i),$$

tj. $\sum_{i=r+1}^{n} b_i \mathbf{u}_i \in \mathrm{Ker}\,(F)$. Existuje tedy vyjádření

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{r} b_i \mathbf{u}_i.$$

Platí proto

$$\sum_{i=r+1}^{n} b_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{r} (-b_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Protože je posloupnost $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislá, plyne odtud, že $b_i = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Posloupnost $F(\mathbf{u}_{r+1}), \ldots, F(\mathbf{u}_n)$ je tak rovněž lineárně nezávislá a tedy báze prostoru $\mathrm{Im}\,(F)$. Platí proto

$$\dim \mathrm{Im}\,(F) = n - r = \dim \mathbf{U} - \dim \mathrm{Ker}\,(F).$$

□

Jiný důkaz poslední věty vyplývá přímo z věty 6.18. Stačí zvolit bázi $\mathcal{A}$ v prostoru $\mathbf{U}$, bázi $\mathcal{B}$ v prostoru $\mathcal{S}(F)$ a použít větu 6.18 na matici $\mathbf{A} = [F]_{\mathcal{AB}}$ zobrazení F vzhledem k bázím $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Potřebujete k tomu následující jednoduché cvičení.

Cvičení 7.5 *Pro matici* $\mathbf{A}$ *tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$ *označíme* F *zobrazení, které každému vektoru* $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ *přiřadí vektor* $F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbf{T}^m$*. Takto definované zobrazení* $F : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *je lineární. Ověřte, že platí*

- $\mathrm{Ker}\,(F) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$,
- $\mathrm{Im}\,(F) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Ukážeme si rovněž, jak z věty 7.23 plyne formulka pro hodnost součinu matic z tvrzení 6.22.

Nový důkaz tvrzení 6.22.

Předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{B}$ je matice typu $n \times p$, obě s prvky z tělesa $\mathbf{T}$. Definujeme zobrazení $A_0 : \mathcal{S}(\mathbf{B}) \to \mathbf{T}^m$ předpisem

$$A_0(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

pro libovolný vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{T}^n$. Podle věty 7.23 platí

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A_0) + \dim \mathrm{Im}\,(A_0) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

Podle věty 6.16 a úlohy 6.4 platí

$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{B}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{B}) = \mathrm{rank}\,(\mathbf{B}).$$

Spočítáme dále čemu se rovnají $\dim \mathrm{Im}\,(A_0)$ a $\dim \mathrm{Ker}\,(A_0)$. Pro výpočet první z obou dimenzí dokážeme rovnost

$$\mathrm{Im}\,(A_0) = \mathcal{S}(\mathbf{AB}).$$

Je-li $\mathbf{z} \in \mathrm{Im}\,(A_0)$, existuje $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$ tak, že $\mathbf{z} = A_0(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Podmínka $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$ říká, že existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^p$ tak, že $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Proto $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{z} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ a $\mathrm{Im}\,(A_0) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{A}\mathbf{B})$.

Jestliže naopak $\mathbf{z} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}\mathbf{B})$, existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^p$ takový, že platí rovnost $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$. Označíme $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Potom $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} = A_0(\mathbf{y})$. Proto $\mathbf{z} \in \mathrm{Im}\,(A_0)$ a tedy platí i opačná inkluze $\mathcal{S}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Im}\,(A_0)$.

Z právě dokázané rovnosti $\mathrm{Im}\,(A_0) = \mathcal{S}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ pak vyplývá

$$\dim \mathrm{Im}\,(A_0) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathrm{rank}\,(\mathbf{A}\mathbf{B}).$$

K výpočtu $\dim \mathrm{Ker}\,(A_0)$ dokážeme rovnost

$$\mathrm{Ker}\,(A_0) = \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

Je-li $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\,(A_0)$, platí $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a $\mathbf{0} = A_0(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y}$, tj. rovněž $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Tedy $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a proto $\mathrm{Ker}\,(A_0) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$.

Jestliže naopak $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$, platí $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$, tj. zobrazení A_0 je definováno v bodě $\mathbf{y} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a $A_0(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Proto $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\,(A_0)$ a tedy $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(A_0)$.

Z rovnosti $\mathrm{Ker}\,(A_0) = \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$ tak vyplývá

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A_0) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

Dosazením všech tří formulí do rovnosti $\dim \mathrm{Ker}\,(A_0) + \dim \mathrm{Im}\,(A_0) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{B})$ pak dostaneme

$$\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) + \mathrm{rank}\,(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathrm{rank}\,(\mathbf{B}).$$