MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2024–2025

LUBOŠ PICK

6. Číselné řady

6.1. Základní pojmy.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$. Řekneme, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (je **konvergentní**), je-li $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní. Řekneme, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (je **divergentní**), jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení budeme někdy říkat, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim s_m = \infty$, respektive $\lim s_m = -\infty$. Číslo $a_n, n \in \mathbb{N}$, je n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a číslo $s_m, m \in \mathbb{N}$, je jejím m**-tým částečným součtem**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je jakožto matematický objekt totožná s posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud tedy hovoříme o řadě a ne o posloupnosti, říkáme tím, že nás zajímají otázky související s příslušnou posloupností částečných součtů.

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí tedy jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje a nemá součet.} \end{cases}$$

Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje řadu, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde $s_m = \sum_{j=k}^{m} a_j$, pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Případná zobecnění výsledků pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jsou přímočará.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ tedy diverguje.

Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

(a) řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$,
(b) pokud $|q| < 1$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Potom dostáváme

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pro } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ n+1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Případ $q \geq 1$. Potom z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Naše řada tedy diverguje.
Případ $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy naše řada konverguje.

Případ $q = -1$. Řada diverguje podle předcházejícího příkladu.

Případ $q < -1$. Platí $\lim s_{2n} = \infty$ a $\lim s_{2n-1} = -\infty$, a tedy $\lim s_n$ neexistuje. Proto řada diverguje.

(b) Plyne z předchozího.

Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Řešení. Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) = 1.$$

Poznámka (součet versus konvergence)**.** Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. Pokud však ukážeme, že je řada konvergentní, můžeme její součet alespoň přiblížit pomocí hodnot částečných součtů.

Poznámka (změna konečného počtu členů řady)**.** Pro nekonečné řady nemá změna konečně mnoha členů řady vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet).

Pro důkaz předchozího tvrzení označme n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako s_n a n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jako t_n. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí

$$s_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k = \sum_{k=n_1}^{n} a_k = \sum_{k=n_1}^{n} b_k = t_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k,$$

neboli $s_n = t_n + c$, kde $c = \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \in \mathbb{R}$. Má-li tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet $A \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim s_n = A$, a tedy $\lim t_n = A - c$. Výraz $A - c$ je definován, neboť $c \in \mathbb{R}$. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $A \in \mathbb{R}$, a tedy také $A - c \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Tím je dokázána jedna implikace. Opačnou lze dokázat obdobně.

Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

Věta 6.1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Potom* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Zřejmě existuje také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle věty o aritmetice limit tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. □

Poznámka. V některých případech lze použít Větu 6.1 k odvození divergence řady. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverguje.

Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je zřejmě rostoucí. Tedy existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A. Navíc platí $A = \sup\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0 + 1$ a $m = 2n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž máme

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ jsme tedy odvodili

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon \left|s_m - s_n\right| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tedy nesplňuje BC podmínku, a proto diverguje. Platí tedy $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$.

Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**. Název řady vychází z faktu, že každý člen řady kromě prvního je harmonickým průměrem svých sousedních členů.

Poznámka. Harmonická řada ukazuje, že opačná implikace v tvrzení Věty 6.1 neplatí. Platí totiž $\lim \frac{1}{n} = 0$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta 6.2. *Nechť řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *mají součet.*

(a) *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a výraz* $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je definován. Potom má řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *součet a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(b) *Nechť je výraz* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *definován. Potom má řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *součet a platí* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

konec 1. přednášky (18.2.2025)

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ a $t_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit obdržíme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m\to\infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(a_n+b_n) = \lim_{m\to\infty}(s_m+t_m)\\ &= \lim_{m\to\infty}s_m + \lim_{m\to\infty}t_m = \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n.\end{aligned}$$

$\square$

Důsledek (linearita konvergentních řad)**.** *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergentní a $\alpha\in\mathbb{R}$. Potom platí:*

(a) *$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,*
(b) *$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.*

Věta 6.3. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ divergentní.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní, je podle Důsledku také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergentní. To je spor. $\square$

Věta 6.4 (Bolzanova—Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) *$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní,*
(ii) *platí výrok*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m,n\in\mathbb{N}, m\ge n\ge n_0\colon \left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

Důkaz. Položme $s_0=0$ a pro $n\in\mathbb{N}$ označme $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. Potom pro každé $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n$, platí $\sum_{k=n}^{m}a_k=s_m-s_{n-1}$.

(i) ⇒ (ii) Posloupnost $\{s_n\}$ konverguje, a proto splňuje Bolzanovu—Cauchyovu podmínku. Pomocí této podmínky ověříme (ii). Zvolme $\varepsilon>0$. Nalezneme $p_0\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n,m\in\mathbb{N}, n\ge p_0, m\ge p_0\colon |s_n-s_m|<\varepsilon.$$

Položme $n_0=p_0+1$. Pro každá $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n\ge n_0$, platí $m>n-1\ge n_0-1=p_0$, a tedy

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|=|s_m-s_{n-1}|<\varepsilon.$$

Tím je tvrzení (ii) dokázáno.

(ii) ⇒ (i) Ověříme Bolzanovu—Cauchyovu podmínku pro posloupnost $\{s_n\}$. Zvolme $\varepsilon>0$. K němu nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ podle (1). Zvolme $n,m\in\mathbb{N}, n\ge n_0, m\ge n_0$. Potom podle (ii) platí

$$|s_n-s_m|=\begin{cases}|\sum_{k=m+1}^{n}a_k|<\varepsilon & \text{pro } n>m,\\ 0<\varepsilon & \text{pro } n=m,\\ |\sum_{k=n+1}^{m}a_k|<\varepsilon & \text{pro } m>n.\end{cases}$$

V prvním případě používáme nerovnost $n\ge m+1>n_0$ a ve třetím $m\ge n+1>n_0$. Posloupnost $\{s_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tudíž konverguje. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje. $\square$

Poznámka. Není těžké si rozmyslet, že výrok (1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \colon \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < C\varepsilon.$$

6.2. **Řady s nezápornými členy.** Důležitý speciální případ řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Takové řady mají vždy součet (Věta 6.5) a ke zkoumání jejich konvergence máme k dispozici speciální kritéria (např. Věty 6.7, 6.8 a 6.9).

Věta 6.5 (existence součtu řady s nezápornými členy)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Pak má* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *součet.*

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ pro $m \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy. Tudíž $\lim\{s_m\}$ existuje, a tedy existuje součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ☐

Věta 6.6 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$*, platí* $a_n \leq b_n$*.*

(a) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*
(b) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje, pak diverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Důkaz. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Posloupnost $\{t_n\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_n\}$ shora omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq s_{n_0} + t_n$, a tedy je i posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená. Navíc je neklesající, a tedy konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení plyne z (a). ☐

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní pro každé $\alpha \in [2, \infty)$ a divergentní pro každé $\alpha \in (-\infty, 1]$.

Řešení. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = n^{-\alpha}$. Nechť $\alpha \in [2, \infty)$. Označme $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} = b_n.$$

Z výše uvedeného příkladu vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní, a tedy je podle Věty 6.2 konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle Věty 6.6(a) je tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Nechť $\alpha \in (-\infty, 1]$. Označme $c_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řady s nezápornými členy a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n \leq a_n.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje, podle Věty 6.6(b) diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka. Zatím nevíme, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, či diverguje pro $\alpha \in (1, 2)$.

Věta 6.7 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je řada s kladnými členy a existuje* $\lim \frac{a_n}{b_n}$*. Označme* $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$*.*

(a) *Jestliže* $A \in (0, \infty)$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*
(b) *Jestliže* $A = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*
(c) *Jestliže* $A = \infty$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Důkaz. (a) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}. \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Z první nerovnosti v (2) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A} a_n$. Podle Věty 6.2 konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A} a_n$, a tedy podle Věty 6.6(a) konverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\Leftarrow$ Z druhé nerovnosti v (2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3A}{2} b_n$. Obdobným způsobem jako v důkazu opačné implikace lze nyní dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(b) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 6.6(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq b_n$. Podle Věty 6.6(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. $\square$

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle výše uvedeného příkladu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 6.7(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Věta 6.8 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže*

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) *Jestliže* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$*, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(c) *Jestliže* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$*, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(d) *Jestliže* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$*, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

(e) *Jestliže* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$*, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0,1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní. Podle Věty 6.6(a) je tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A,1)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n}; n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Tvrzení tedy plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A > 1$, nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$, a tedy ani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Věty 6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení plyne z (d). $\square$

Poznámka. Jestliže $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ může konvergovat i divergovat. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Příklad. Nechť $a > 1$ a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Platí
$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$
Podle Věty 6.8(c) tedy řada konverguje.

Věta 6.9 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže*
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$
pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) *Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(c) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(d) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme výrok
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \tag{3}$$
Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom
$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$
přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konverguje. Podle Věty 6.6(a) tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nalezneme $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$
Tvrzení pak plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$
Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí
$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \geq a_{n_0}.$$
Podle předpokladu platí $a_{n_0} > 0$, a tedy neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 6.1 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Poznámka. Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ může konvergovat i divergovat. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž obě řady splňují $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Poznámka. Předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Například řada

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots$$

konverguje, ale $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$.

Řešení. Řada zřejmě diverguje pro $k = 1$. Předpokládejme, že $k \geq 2$. Řada má kladné členy a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\dots(kn+k)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{1}{n})\dots(k+\frac{k}{n})}. \tag{4}$$

Odtud plyne, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 6.9(c) tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 6.10 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

$\Leftarrow$ Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m \leq 2^k - 1$. Potom

$$s_m \leq s_{2^k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq A.$$

Posloupnost $\{s_m\}$ je tudíž shora omezená, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\Rightarrow$ Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $B \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom

$$s_m = a_1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_j \geq a_1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = \frac{t_k}{2},$$

takže $t_k \leq 2B$. Tudíž je posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. □

Věta 6.11 (o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

Důkaz. Díky výše uvedeným příkladům stačí tvrzení dokázat pro $\alpha \in (1, 2)$. Z vlastností funkcí exp a log plyne, že $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Podle kondenzačního kritéria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

To je geometrická řada s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy konverguje právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$, to jest právě tehdy, když $\alpha > 1$. □

6.3. **Řady s obecnými členy.** V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

Věta 6.12 (Leibnizova)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je monotónní posloupnost reálných čísel splňující* $\lim a_n = 0$*. Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Potom $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, a tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2m+1} - s_{2m-1} = -a_{2m+1} + a_{2m} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2m}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2m-1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti také $\lim_{m\to\infty} a_{2m} = 0$. Z věty o aritmetice limit tedy dostáváme

$$\lim s_{2m-1} = \lim(s_{2m} - a_{2m}) = \lim s_{2m},$$

takže posloupnosti $\{s_{2m}\}$ a $\{s_{2m+1}\}$ mají společnou limitu, kterou označíme s. Odtud plyne, že $\lim s_n = s$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m} \leq s_{2m} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje. Jestliže je $\{a_n\}$ neklesající, lze tvrzení dokázat obdobně. □

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 6.12 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n)^{12}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Posloupnost $\{(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n)^{12}\}$ je nerostoucí a platí $\lim(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n)^{12} = 0$. Z Věty 6.12 tedy plyne, že zadaná řada je konvergentní.