# MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2024–2025
# POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

## 1. Vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy

**Příklad 1.1.** Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}.$$

**Příklad 1.2.** Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

**Příklad 1.3.** Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}},\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{2^n-2n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}).$$

**Příklad 1.4.** Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}.$$

**Příklad 1.5.** Určete pro která $z\in\mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3\,z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,!}\,z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}\,z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}\,z^n.$$

**Příklad 1.6.** Určete pro která $z\in\mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

## Výsledky

- Příklad 1.1: Diverguje, diverguje, konverguje, konverguje.
- Příklad 1.2: Konverguje, diverguje, konverguje.
- Příklad 1.3, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 1.3, 2):

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$, a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 1.3, 3): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$, a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \left( \frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}} \right)}{\frac{2^n}{3^n} \left( \frac{1+(-1)^n \frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n \frac{n}{3^n}} \right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n \frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n \frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:
(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$;
(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.
Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 1.3, 4): Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

- Příklad 1.4, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5} \left( \frac{n+1}{n} \right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 1.4, 2): Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1.$$

  Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.
- Příklad 1.4, 3): Zkoumaná řada je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní.
- Příklad 1.5: $(-1,1)$, $\mathbb{R}$, $\langle -1/2, 1/2\rangle$, $(-3,3)$.
- Příklad 1.6: $(-1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$.

## 2. Vyšetřování absolutní a neabsolutní konvergence číselných řad s obecnými členy

**Příklad 2.1.** Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{58} n}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{4};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2)\left(\sqrt{n^6+n}-n^3\right).$$

**Příklad 2.2.** Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\log n]}}{n};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}.$$

**Příklad 2.3.** Vyšetřete charakter konvergence řad v závislosti na parametru:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n^x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{\log a}}{n}, \qquad x\geq 0,\ q\in\mathbb{R},\ a>1.$$

**Příklad 2.4.** Nalezněte součet řad

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x|<1,$$
$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k}, \quad |x|<1,\ |y|<1,$$
$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{kde } c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}.$$

**Výsledky.**
- Cvičení 2.1: (i), (ii), (iii) konvergují neabsolutně, (iv) konverguje absolutně;
- Cvičení 2.2: (i) konverguje neabsolutně, (ii) diverguje, (iii) konverguje neabsolutně, (iv) konverguje neabsolutně;
- Cvičení 2.3: (i) diverguje pro $x=0$, konverguje neabsolutně pro $0<x\leq 1$, konverguje absolutně pro $x>1$;
  (ii) diverguje pro $q\leq\frac{1}{2}$, konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2}<q\leq 1$, konverguje absolutně pro $q>1$;
  (iii) konverguje neabsolutně pro každé $a>1$;
- Cvičení 2.4: (i) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$, (ii) $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, (iii) $e-1$.

## 3. Číselné řady II

**Příklad 3.1.** Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^2 n}\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^\alpha+\sin\frac{n\pi}{4}},\quad \alpha>0,\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n},\qquad a\in\mathbb{R}.$$

**Příklad 3.2.** Rozhodněte, pro která $a\in\mathbb{R}$ konverguje absolutně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n}.$$

**Příklad 3.3.** Dokažte, že pro všechna $a\in\mathbb{R}$ a $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right|<2\sqrt{\pi}.$$

**Příklad 3.4.** Dokažte následující *Kroneckerovo lemma*: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$. Potom

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}=o\left(\frac{1}{b_n}\right)\qquad\text{a}\qquad\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=o\left(b_n\right).$$

**Příklad 3.5.** Utvořte Cauchyův součin daných řad a spočítejte jeho součet:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

**Příklad 3.6.** Zkoumejte konvergenci (a eventuální součet) následujících zobecněných řad:

(i) $\displaystyle\sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2}x^iy^k,\quad |x|,|y|<1$

(ii) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{nk(n+k+2)}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2}\frac{n!k!}{(n+k+2)!}$,

(v) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{n^\alpha k^\beta},\quad \alpha,\beta>0$,

(vi) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{1}{(n+k)^p},\quad p>0$,

(vii) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}nx^{nk},\quad |x|<1.$

**Výsledky.** • Příklad 3.1: (i), (ii), (iii) konvergují, (iv) konverguje pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, (v) konverguje, (vi), (vii) a (viii) konvergují pro každé $a \in \mathbb{R}$.

- Příklad 3.2: Řada konverguje absolutně právě tehdy, pokud $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro ostatní $a \in \mathbb{R}$ konverguje neabsolutně.
- Příklad 3.5: (i) $e^{\frac{5}{2}}$, (ii) $-\frac{1}{2}\log 2$, (iii) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

**Příklad 3.7.** Dokažte následující *Kummerovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť $D_n$ je posloupnost kladných reálných čísel. Označme

$$p_n = D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Potom

(i) jestliže $\liminf p_n > 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup p_n < 0$ a navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_n}$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

**Příklad 3.8.** Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Raabeovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Potom

(i) jestliže $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

**Příklad 3.9.** Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Gaussovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť existuje omezená posloupnost reálných čísel $b_n$ a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Potom

(i) jestliže $k > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $k \le 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

## 4. Primitivní funkce

**Příklad 4.1.** Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int (x+5)^3\,dx, \qquad \int \sin(2x+7)\,dx, \qquad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx;$$
$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \qquad \int \sqrt{1-\sin(2x)}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx;$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

**Příklad 4.2.** Pomocí jednoduchých substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \sin(\log x)\,\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,dx;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

**Příklad 4.3.** Pomocí trigonometrických vzorců určete následující primitivní funkce:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}, \qquad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} \qquad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$$

**Příklad 4.4.** Pomocí metody integrování per partes spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int e^x\sin x\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \log x\,dx;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx.$$

**Příklad 4.5.** Pomocí metody integrování per partes odvoďte formule pro následující primitivní funkce:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \sin(\log x)\,dx.$$

**Příklad 4.6.** Pomocí vhodné substituce spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}};$$

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx.$$

**Příklad 4.7.** Procvičte si lepení primitivních funkcí na následujících příkladech:

$$\int |x|\,dx, \qquad \int e^{-|x|}\,dx, \qquad \int \max\{x,x^2\}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \qquad \int |2x+1|\,dx; \qquad \int \left(|1+x|-|1-x|\right)\,dx.$$

**Příklad 4.8.** Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4};$$

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+x^6}, \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx.$$

**Příklad 4.9.** Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx, \qquad \int \sqrt{x^2-2x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

**Příklad 4.10.** Pomocí Eulerových substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}, \qquad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

**Příklad 4.11.** Na intervalu $(-\pi,\pi)$ nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{(\sin x)|\sin x|+(\cos x)^2}{(\sin x)^2+2(\cos x)^2}\,dx.$$

**Příklad 4.12.** Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi)$ k funkci

$$f(x) = \frac{1}{6\cos^2 x + 4\sin x \cos x + \sin^2 x}.$$

**Příklad 4.13.** Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu k funkci

$$f(y) = \frac{1}{3\cos^2 y + \sin(2y) + 1}.$$

**Příklad 4.14.** Spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, na kterých existuje, k funkci

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x}}{e^{3x} - 1}\, dx.$$

**Výsledky.**

- Příklad 4.11: Označme

$$I := \int \frac{(\sin x)|\sin x| + (\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\, dx.$$

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, a to na intervalech $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, pak po řadě vychází $t \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$ a $t \in (-\infty, 0)$. Tedy

$$I = \begin{cases} \int \frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}\, dt, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \int \frac{dt}{2+t^2} & x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Rozložíme první funkci na parciální zlomky a druhou spočítáme rovnou. U první funkce dostaneme rozklad

$$\frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{2+t^2},$$

uhodneme $A = C = 0$ a dopočítáme $B = 2$, $D = -3$. Celkem dostaneme

$$I = \begin{cases} 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C_1, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C_2, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C_3, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C_4, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Nyní spočítáme jednu primitivní funkci na celém intervalu $(-\pi, \pi)$, řekněmě $F_0$. Nejprve zvolíme konstantu $C_2 = 0$ Konstanty $C_1$, $C_3$ a $C_4$ spočítáme z jednostranných limit funkce $F_0$ v bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0. Dostáváme

$$C_1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

V bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0 dodefinujeme funkci $F_0$ tak, aby byla spojitá. Celkem tedy máme

$$F_0(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} - \pi, & x = -\frac{\pi}{2}, \\ 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right), & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Všechny primitivní funkce na intervalu $(-\pi, \pi)$ jsou tedy tvaru

$$F(x) = F_0(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Příklad 4.12: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(x)+C$, $x\in(0,\pi)$, kde (například)
$$F_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,(3\operatorname{cotg} x + 1)\right)$$
nebo
$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{tg} x + 2)\right), & x\in(0,\frac{\pi}{2}); \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{tg} x + 2)\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x\in(0,\frac{\pi}{2}); \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$
- Příklad 4.13: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(y)+C$, $y\in(-\infty,\infty)$, kde (například)
$$F_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} y+1}{\sqrt{3}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}}\right), & y\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi); \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+k\right), & y=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
- Příklad 4.14:
$$\log|e^x-1| - \frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+e^x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\right), \qquad x\in(-\infty,0) \quad \text{nebo} \quad x\in(0,\infty).$$

## 5. Určitý integrál

**Příklad 5.1.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}\,dx.$$

**Příklad 5.2.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}.$$

**Příklad 5.3.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

**Příklad 5.4.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{y}-1}{(y+2)(\sqrt{y}+1)\sqrt{y}}\,dy.$$

**Příklad 5.5.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t+3\sin t+1}}\,dt.$$

**Příklad 5.6.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x+2}{(\cos(2x)+\sin^2 x)(\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x+3)}\,dx.$$

**Příklad 5.7.** Spočtěte Newtonův integrál
$$\int_{16}^{\infty} \frac{2y^{\frac{3}{2}}-5y+8\sqrt{y}-1}{\left(y-2\sqrt{y}-3\right)\sqrt{y}\left(y-\sqrt{y}+2\right)}\,dy$$

**Výsledky.**

- Příklad 5.1: Označme
$$I := \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{4x}+4e^{3x}-e^{2x}-2e^x}{(e^{2x}+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}\,dx.$$

Použijeme substituci $y = e^x$, pak $y \in (0,1)$. Protože $dy = e^x\,dx$, máme

$$I = \int_0^1 \frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)}\,dy.$$

Rozložíme integrand na parciální zlomky:

$$\frac{y^3 + 4y^2 - y - 2}{(y^2+1)(2y^2+3y+1)} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{2y+1} + \frac{D}{y+1}$$

Použitím cover-up rule, tj. dosazením $y = -\frac{1}{2}$ a $y = -1$ dostaneme ihned $C = D = -1$, pak dosazením například $y = 0$ vypočítáme $B = 0$ a konečně dosazením například $y = 1$ dostaneme $A = 2$. Celkem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{2y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= \left[ \log(y^2+1) - \frac{1}{2}\log(2y+1) - \log(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{1}{2}\log 3. \end{aligned}$$

- Příklad 5.2:
$$\frac{1}{8}\log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right)$$
- Příklad 5.4:
$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - 2\log\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)$$
- Příklad 5.5:
$$\sqrt{5} - 2 + 3\log(5 - 2\sqrt{5}) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5-2\sqrt{5}} - 1\right)$$
- Příklad 5.6:
$$\frac{1}{4}\log\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
- Příklad 5.7: $\infty$ (integrál existuje, ale nekonverguje)

## 6. Konvergence Newtonova integrálu

**Příklad 6.1.** Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}\,dx; \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx; \quad \int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^a\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^p}\,dx; \quad \int_0^1 x^{ax}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^p}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

**Příklad 6.2.** Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Newtonovy integrály:

$$\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^q(1/x)}\,dx.$$

**Příklad 6.3.** V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}\,dx.$$

**Příklad 6.4.** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \operatorname{tg}^\alpha x \, dx.$$

**Příklad 6.5.** Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

**Příklad 6.6.** Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)}{\log(\log(10+x))} \, dx.$$

**Příklad 6.7.** Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty x \cos(x^4) \, dx.$$

**Příklad 6.8.** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^\alpha} \, dx.$$

**Příklad 6.9.** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}) x^\alpha \, dx.$$

**Výsledky.**

- Příklad 6.1:
  konverguje; $p, q > 0$; $p > -1$;
  konverguje; $a \in (-1, 1)$; $0 < p + 1 < q$;
  $a \in \mathbb{R}$, $1 < p < 3$; $a \in \mathbb{R}$;
  $a \in (-1, -\frac{1}{2})$; $p > -\frac{1}{2}$.
- Příklad 6.2: $\alpha > 1$; $q < \frac{3}{2}$.
- Příklad 6.3: Integrál konverguje právě tehdy, když platí buď $\alpha < 1 < \beta$ nebo $\beta < 1 < \alpha$.
- Příklad 6.4: Integrál konverguje právě tehdy, když platí buď $-3 < \alpha < 1$.
- Příklad 6.5: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 6.6: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 6.7: Integrál konverguje neabsolutně.
- Příklad 6.8: Integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (0, 4)$. Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (1, 4)$.
- Příklad 6.9: Integrál konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-5, 0)$. Integrál absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-5, -1)$.

## 7. Aplikace určitého integrálu

**Příklad 7.1.** Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{1+x^2} .$$

**Příklad 7.2.** Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami

$$y^2 = 2x + 1 \quad \text{a} \quad x - y - 1 = 0.$$

**Příklad 7.3.** Spočtěte obsah plochy vymezené grafem paraboly

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

a jejími tečnami vedenými z bodů $[0, -3]$ a $[3, 0]$.

**Příklad 7.4.** Spočtěte obsah plochy vymezené parabolami

$$y = x^2 \quad \text{a} \quad y = \sqrt{x}.$$

**Příklad 7.5.** Spočtěte délku křivky

$$y = a \cosh \frac{x}{a}, \quad x \in [0, b],\ a, b > 0.$$

**Příklad 7.6.** Spočtěte délku paraboly

$$y^2 = 2px$$

mezi počátkem a některým její bodem.

**Příklad 7.7.** Spočtěte délku křivky

$$y = \log x, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}].$$

**Příklad 7.8.** Spočtěte délku křivky

$$y = \log(1 - x^2), \quad x \in [0, \frac{1}{2}].$$

**Příklad 7.9.** Spočtěte délku grafu funkce

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad x \in [0, 4]\ .$$

**Příklad 7.10.** Spočtěte objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^3$.

**Příklad 7.11.** Spočtěte obsah jednotkové sféry v $\mathbb{R}^3$.

**Příklad 7.12.** Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4}, \qquad x \in [2, 4].$$

**Příklad 7.13.** Určete objem a povrch pláště tělesa, vzniklého rotací množiny

$$\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + (y - b)^2 \leq a^2\right\}, \quad (0 < a \leq b),$$

okolo osy $x$.

**Příklad 7.14.** Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \log\left(\frac{1}{\cos x}\right), \qquad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

**Příklad 7.15.** Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \qquad x \in [2, 4].$$

**Příklad 7.16.** Spočtěte objem a povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $y = e^x$ kolem osy $x$, kde $x \in (-\infty, 0)$.

**Příklad 7.17.** Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

**Příklad 7.18.** Nechť $a > 0$. Určete délku křivky, zadané rovnicí

$$y = \cosh x, \qquad x \in [0, a]$$

**Příklad 7.19.** Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti

$$M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 + 8 \leq 6y\right\}$$

kolem osy $x$.

**Příklad 7.20.** Spočtěte objem toru, vzniklého rotací kruhu o poloměru $a > 0$ a středu v bodě $b > a$ kolem osy $y$.

**Příklad 7.21.** Spočtěte povrch pláště parabolické mísy, vzniklé rotací parabolického oblouku $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, kolem osy $y$.

**Příklad 7.22.** Spočtěte povrch pláště ragbyového míče, vzniklého rotací elipsy $x^2+4y^2=4$ kolem osy $y$.

**Příklad 7.23.** Vyšetřete konvergenci následujících číselných řad pomocí integrálního kritéria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\log\frac{n+1}{n-1}.$$

**Příklad 7.24.** *Těžiště* rovinné oblasti dané nerovnostmi $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ je bod $[\overline{x}, \overline{y}]$, kde

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_a^b (f(x))^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Najděte těžiště rovinných oblastí, daných následujícími nerovnostmi:

$$-a \le x \le a, \quad 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2};$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$x^2+y^2=r^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

**Příklad 7.25.** Nechť $f$ je spojitá na $[0,1]$. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n),dx.$$

**Výsledky.**

- Příklad 7.1: $2\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3}$
- Příklad 7.2: $\frac{16}{3}$
- Příklad 7.3: $\frac{9}{4}$
- Příklad 7.4: $\frac{1}{3}$
- Příklad 7.5: $a\sinh\frac{b}{a}$
- Příklad 7.6: $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$
- Příklad 7.7: $1 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$
- Příklad 7.8: $\log 3 - \frac{1}{2}$
- Příklad 7.9: $\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)$
- Příklad 7.10: $\frac{4\pi}{3}$
- Příklad 7.11: $4\pi$
- Příklad 7.12: Označme $L$ hledanou délku křivky. Podle příslušného vzorce je

  $$L = \int_2^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

  kde

  $$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\log x}{4},$$

  takže

  $$f'(x) = x - \frac{1}{4x},$$

tj.

$$f'(x)^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}.$$

Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\, dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx \\ &= \int_2^4 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\log x\right]_{x=2}^{x=4} \\ &= 6 + \frac{\log 2}{4}. \end{aligned}$$

- Příklad 7.13: $V = 2\pi^2 a^2 b$, $S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 7.15: $\frac{1}{2}\log\frac{e^4 - e^{-4} - 2}{e^2 - e^{-2} - 2}$
- Příklad 7.16: $\frac{\pi}{2}$
- Příklad 7.17: $6a$
- Příklad 7.18: $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$
- Příklad 7.19: $6\pi^2$
- Příklad 7.20: $V = 2\pi^2 a^2 b, \quad S = 4\pi^2 ab$
- Příklad 7.21: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$
- Příklad 7.22: $8\pi\left(1 + \frac{\log(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)$
- Příklad 7.23: konverguje, diverguje, konverguje, konverguje
- Příklad 7.24: $\left[0, \frac{4a}{3\pi}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\pi}{8\log(1+\sqrt{2})},\right]$, $\left[\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right]$
- Příklad 7.25: $f(0)$.

## 8. Metrické prostory

**Příklad 8.1.** Ověřte, zda následující funkce definují metriku na $\mathbb{R}$:

$$\varrho(x,y) = |x^3 - y^3|; \qquad \varrho(x,y) = |x^2 - y^2|; \qquad \varrho(x,y) = (x-y)^2.$$

**Příklad 8.2.** Nechť $\varrho_1$ a $\varrho_2$ jsou dvě metriky na množině $P$. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na $P$:

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; 1\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; 2\}.$$

**Příklad 8.3.** Co je potřeba předpokládat o funkci $\varphi$, aby funkce $\varrho(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ definovala metriku na $\mathbb{R}$?

**Příklad 8.4.** Najděte okolí bodu $[1,1]$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ v ruské metrice o poloměrech 1 a 2 a v diskrétní metrice o poloměrech $\frac{1}{2}$ a 2.

**Příklad 8.5.** Rozhodněte, zda v obecném metrickém prostoru platí $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Příklad 8.6.** V metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou najděte uzávěry grafů funkcí

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0; \end{cases} \qquad D(x); \qquad R(x),$$

kde symboly $D$ a $R$ značíme Dirichletovu a Riemannovu funkci.

**Příklad 8.7.** Rozhodněte, zda v metrikách $\ell^1$, $\ell^p$ a $\ell^\infty$ konvergují následující posloupnosti:

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3,\dots,n,0,0,\dots,0,\dots\}\,;\\
&\{1,1,1,\dots,1,0,0,\dots,0,\dots\}\ \ (n \text{ krát});\\
&\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n},\dots,0,\dots\right\}\ \ (n \text{ krát});\\
&\left\{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,\dots\right\}\ \ (n \text{ krát}).
\end{aligned}$$

**Příklad 8.8.** Rozhodněte, zda existuje metrický prostor $P$ a dvě jeho neprázdné podmnožiny $A,B$ tak, aby platilo $A\cap B=\emptyset$ a zároveň $\operatorname{dist}(A,B)=0$. Lze takové množiny nalézt uzavřené? Lze takové množiny nalézt takové, že $A$ je uzavřená a $B$ je kompaktní?

**Příklad 8.9.** Definujme na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } |x-y|\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\\ \frac{1}{2} & \text{jestliže } |x-y|\in\mathbb{Q}\setminus\{0\};\\ 0 & \text{jestliže } x=y. \end{cases}$$

Ověřte, zda $\varrho$ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny otevřené a všechny kompaktní množiny v této metrice.

**Příklad 8.10.** Definujme na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Ověřte, zda $\varrho$ je metrika, a pokud ano, spočtěte $\operatorname{diam}(F_n)$, kde $F_n := [n,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$, v této metrice. Jsou množiny $F_n$ omezené, uzavřené, kompaktní?

**Příklad 8.11.** Definujme na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{jestliže } x\neq 0,\ y=0;\\ \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } y\neq 0,\ x=0;\\ \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|} & \text{jestliže } x\neq 0,\ y\neq 0, x\neq y;\\ 0 & \text{jestliže } x=y. \end{cases}$$

Ověřte, zda $\varrho$ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny kompaktní množiny v této metrice. Je prostor $(\mathbb{R},\varrho)$ kompaktní?

**Příklad 8.12.** Nechť $P$ je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují $y,z\in P$ taková, že $\varrho(y,z)=\operatorname{diam}P$.

**Příklad 8.13.** Dokažte, že existuje metrický prostor $P$ a v něm neprázdná uzavřená množina $F$ a neprázdná kompaktní množina $K$ takové, že jejich vzdálenost není realisována, tedy neexistují body $a\in K$, $b\in F$ splňující $\varrho(a,b)=\operatorname{dist}(K,F)$. Lze úlohu vyřešit v $\mathbb{R}^n$?

**Příklad 8.14.** Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}$, kde $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$, nemá limitu v $(C([0,1]),\varrho_{\sup})$.

**Příklad 8.15.** Nalezněte posloupnost $\{f_n\}$, která bodově konverguje ke spojité funkci, ale nekonverguje k této funkci v $(C([0,1]),\varrho_{\sup})$.

**Příklad 8.16.** Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru $P$ splňující $x_n\to x$ pro nějaké $x\in P$. Rozhodněte, zda je množina $\{x_n; x\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ kompaktní.

**Příklad 8.17.** Nechť $P$ je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte omezenou spojitou funkci $f\colon P\to\mathbb{R}$, která není stejnoměrně spojitá.

**Příklad 8.18.** Nechť $P$ je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte neomezenou spojitou funkci $f\colon P\to\mathbb{R}$.

**Příklad 8.19.** Rozhodněte, zda je množina $\{x=\{x_n\}; |x_n|\leq\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$ kompaktní v $\ell^2$.

**Příklad 8.20.** Rozhodněte, zda je množina všech neklesajících spojitých funkcí $f$ na $[0,1]$ splňujících $\|f\| \leq 1$ kompaktní v $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$.

**Příklad 8.21.** Rozhodněte, zda je množina všech 1-lipschitzovských funkcí $f$ na $[0,1]$ splňujících $\|f\| \leq 1$ kompaktní v $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$.

**Příklad 8.22.** Rozhodněte, zda součin dvou kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

**Příklad 8.23.** Definujme funkci $F\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ předpisem $F(x) = \limsup x_n$. Je $F$ spojitá na $\ell^\infty$, na $c$, nebo na $c_0$?

**Příklad 8.24.** Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru splňující

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Plyne odtud, že $\{x_n\}$ je cauchyovská?

**Příklad 8.25.** Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\varrho_1(x,y) = |x-y|$ a $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k právě jedné z těchto dvou metrik.

**Příklad 8.26.** Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\varrho_1(x,y) = |x-y|$ a $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Rozhodněte, zda některý z prostorů $(\mathbb{R}, \varrho_1)$ a $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ má více otevřených množin.

**Příklad 8.27.** Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriku $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Rozhodněte, zda je prostor $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ úplný.

**Příklad 8.28.** Nechť $P$ je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f\colon P \to P$ splňuje podmínku

$$\forall x, y \in P,\; x \neq y\colon \varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x,y).$$

Dokažte, že potom má $f$ na $P$ pevný bod.

**Příklad 8.29.** Uvažujme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ s následující metrikou

$$\varrho_{\mathrm{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ukažte, že tento metrický prostor je první kategorie a není úplný a že jeho jednotková koule je řídká.

**Příklad 8.30.** Nalezněte metrický prostor $(P, \varrho)$ a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$.

**Příklad 8.31.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že množina

$$\{f \in \mathcal{C}([a,b])\colon \exists x \in (a,b)\colon f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

je 1. kategorie v prostoru $\mathcal{C}([a,b])$.

**Příklad 8.32.** Ukažte, že prostor $\ell_2$ je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.

**Příklad 8.33.** Ukažte, že metrický prostor $(P, \varrho)$ je totálně omezený právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků $P$ lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

**Příklad 8.34.** Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?

**Příklad 8.35.** Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?

**Příklad 8.36.** Je vzor souvislé množiny při spojitém zobrazení souvislá množina?

**Příklad 8.37.** Je množina $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ souvislá?

**Příklad 8.38.** Nechť $P$ je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Dokažte, že $P$ je nespočetný.

**Příklad 8.39.** Ukažte, že každý normovaný lineární prostor je souvislý.

**Příklad 8.40.** Nechť $P = \mathbb{R}$ a

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{je-li } x \neq 0, y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x = 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{je-li } x = y; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x \neq 0, y \neq 0, x \neq y. \end{cases}$$

Určete, zda
(i) $(P,\varrho)$ je metrický prostor;
(ii) $(P,\varrho)$ je úplný;
(iii) $(P,\varrho)$ je kompaktní.
Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru $(P,\varrho)$.

**Příklad 8.41.** Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Určete, zda
(i) $(P,\varrho)$ je metrický prostor;
(ii) $(P,\varrho)$ je úplný;
(iii) $(P,\varrho)$ je kompaktní.
Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru $(P,\varrho)$. Jsou jednobodové množiny otevřené?

**Příklad 8.42.** Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n+1.$$

Zobrazení $T$ zřejmě nemá pevný bod. Lze odtud usoudit, že $T$ není kontrakce na $P$? Jestliže ne, dokažte to nějak jinak.

**Příklad 8.43.** Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n^2.$$

Zobrazení $T$ zřejmě nemá pevný bod. Dokažte, že přesto je $T$ kontrakce na $P$. Jak je to možné?

**Příklad 8.44.** V prostoru $C([0,1])$ se supremovou metrikou definujeme pro dvě dané funkce $g, h \in C([0,1])$ *úsečku*:

$$f : [0,1] \to C([0,1]), \quad f(a) = g + a(h-g).$$

Dokažte, že: (a) úsečka je křivka;
(b) $f$ je stejnoměrně spojitá na $[0,1]$;
(c) $C([0,1])$ je křivkově souvislý prostor.
Všimněte se, že stačí dokázat jen jedno z tvrzení (i)–(iii). Které?

**Příklad 8.45.** Zkoumejte, jaké vlastnosti musíme vyžadovat od metrického prostoru, aby v něm bylo možno nějakým rozumným způsobem zadefinovat úsečku a aby platila analogie tvrzení z předcházejícího příkladu. Pro jakou třídu metrických prostorů takto automaticky zajistíme křivkovou souvislost?

**Příklad 8.46.** Ukažte na příkladu, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.
Návod: Graf funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0,1)$.

**Příklad 8.47.** Ukažte příklad množin $A, B$ takových, že $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$, $A$ je křivkově souvislá množina, $B$ není křivkově souvislá množina.
Návod: V $\mathbb{R}^2$ vezměte všechny úsečky délky 1 vycházející z počátku a mající směrnice $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je množina $A$. Množinu $B$ vytvořte tak, že k $A$ přidáte ještě úsečku $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in [\frac{1}{2}, 1], y = 0\}$. Je $A$ křivkově souvislá? Co je $\overline{A}$? Platí $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$? Je $B$ křivkově souvislá?

## 9. Funkce více proměnných

### 9.1. **Základní pojmy.**

**Příklad 9.1.** Načrtněte grafy následujících funkcí:

$$f(x,y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right), \qquad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - 2x;$$
$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2};$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

**Příklad 9.2.** Načrtněte graf funkce (jedné proměnné)

$$F(t) = f(\cos t, \sin t),$$

kde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (y \ge x); \\ 0 & (y < x). \end{cases}$$

**Příklad 9.3.** Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

$$f(x,y) = x + \sqrt{y-1}; \quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$$
$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right); \quad f(x,y) = \log -x - y; \quad f(x,y) = \sqrt{\sin x^2 + y^2}.$$

**Příklad 9.4.** Určete a načrtněte vrstevnice následujících funkcí:

$$f(x,y) = x + y; \quad f(x,y) = x^2 + y^2; \quad f(x,y) = x^2 - y^2;$$
$$f(x,y) = (x+y)^2; \quad f(x,y) = \frac{y}{x}; \quad f(x,y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2};$$
$$f(x,y) = \sqrt{xy}; \quad f(x,y) = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}; \quad f(x,y) = x^y \ (x > 0).$$

**Příklad 9.5.** Spočtěte $f(1, \frac{y}{x})$, jestliže $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

**Příklad 9.6.** Určete $f(t)$, jestliže $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x > 0)$.

**Příklad 9.7.** Nechť $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$ a $z = x$ pro $y = 1$. Určete funkce $f$ a $z$.

**Příklad 9.8.** Nechť $z = x + y + f(x - y)$ a $z = x^2$ pro $y = 0$. Určete funkce $f$ a $z$.

**Příklad 9.9.** Určete $f(x,y)$, jestliže $f(x + y, \frac{x}{y}) = x^2 - y^2$.

**Výsledky.** Příklad 9.1: trojúhelník, sféra, kužel, paraboloid.

Příklad 9.2:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & [-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi]; \\ 0 & (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Příklad 9.3: $(-\infty, \infty) \times [1, \infty)$; kruh $\{x^2 + y^2 \le 1\}$; doplněk téhož kruhu v $\mathbb{R}^2$; plocha ohraničená dvěma tupými úhly vymezenými přímkami $y = 0$ a $y = 2x$ bez počátku; polorovina $\{x + y < 0\}$; sjednocení mezikruží $\{2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k+1)\pi\}$.

Příklad 9.4: rovnoběžné přímky, soustředné kružnice, hyperboly se společnou asymptotou $y = \pm x$, rovnoběžné přímky, svazek paprsků vycházejících z počátku bez počátečního bodu; soustředné podobné elipsy, hyperboly ležící v kvadrantech I a III s asymptotami blížícími se k souřadným osám; křivky $y = \frac{C}{\log x}$.

Příklad 9.5: $f(1, \frac{y}{x}) = f(x,y)$.

Příklad 9.6: $f(t) = \sqrt{1+t^2}$.

Příklad 9.7: $f(t) = 2t + t^2$, $z(x,y) = x - 1 + \sqrt{y}$.

Příklad 9.8: $f(t) = t^2 - t^2$, $z(x,y) = 2y + (x-y)^2$.

Příklad 9.9: $f(x,y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$.

## 9.2. **Limita a spojitost.**

**Poznámka.** V této kapitole budeme vyšetřovat limity funkcí více proměnných. Tyto limity chápeme ve smyslu definice limity pro zobrazení mezi metrickými prostory. Výjimku tvoří limity v bodech, které mají jednu nebo více složek nevlastních (tj. v bodech typu $[a,\infty]$, $[\infty,b]$, $[\infty,\infty]$ a podobně). Tyto limity chápeme ve smyslu následující definice: řekneme, že $\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} f(x,y) = A \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x, y > K :\ |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Obdobně definujeme limity v bodech s více nevlastními složkami a také nevlastní limity (tj. případy $A = \pm\infty$).

**Příklad 9.10.** Nechť

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1,$$

a tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$$

neexistuje.

**Příklad 9.11.** Nechť

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Dokažte, že sice

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$$

neexistuje.

**Příklad 9.12.** Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right), & x \neq 0,\ y \neq 0; \\ 0, & x = 0 \text{ nebo } y = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že sice ani jedna z limit

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

neexistuje, ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$$

existuje. Čemu se tato limita rovná?

**Příklad 9.13.** Spočtěte

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad \text{a} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

kde

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \qquad a=b=\infty;$$

$$f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y}, \qquad a=\infty,\ b=0+;$$

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right), \qquad a=b=\infty;$$

$$f(x,y) = \frac{1}{xy}\operatorname{tg}\left(\frac{xy}{1+xy}\right), \qquad a=0,\ b=\infty;$$

$$f(x,y) = \log_x(x+y), \qquad a=1,\ b=0.$$

**Příklad 9.14.** Spočtěte následující limity ($a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2};$$

$$\lim_{[x,y]\to[0,a]} = \frac{\sin(xy)}{x};$$

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} = (x^2+y^2)^{x^2y^2};$$

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,a]} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$

$$\lim_{[x,y]\to[1,0]} = \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

**Příklad 9.15.** Dokažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2 \neq 0); \\ 0 & (x^2+y^2=0), \end{cases}$$

je spojitá jako funkce proměnné $x$ i proměnné $y$, ale není spojitá jako funkce dvou proměnných.

**Příklad 9.16.** Dokažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x^2+y^2 \neq 0); \\ 0 & (x^2+y^2=0), \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0,0]$ po všech přímkách $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $t \in (0,\infty)$, $\alpha \in [0,2\pi]$, ale přesto není v bodě $[0,0]$ spojitá.

**Příklad 9.17.** Zjistěte, zda je funkce

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

spojitá na svém definičním oboru.

**Příklad 9.18.** Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^2y^3}{x^2+y^2}$$

dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

**Příklad 9.19.** Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$

dodefinovat na přímce $y=x$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

**Příklad 9.20.** Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y)=\frac{\sin(x)\sin^3(y)}{1-\cos(x^2+y^2)}$$

dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

**Příklad 9.21.** Najděte podmínky na konstanty $a,b,c\in\mathbb{R}$, aby existovala limita ($\alpha\in\mathbb{R}$)

$$\lim_{[x,y]\to[0,\alpha]}=\frac{xy}{ax^2+bxy+cy^2}.$$

**Výsledky.** Příklad 9.12: $0$

Příklad 9.13: $0,1$; $\frac{1}{2},1$; $0,1$; $0,1$; $1,\infty$.

Příklad 9.14: $0$; $a$; $1$; $e$; $\log 2$.

Příklad 9.17: ano

Příklad 9.18: ano, $f(0,0)=1$.

Příklad 9.19: ano, $f(x,x)=3x^2$.

9.3. **Derivace a totální diferenciál.**

**Příklad 9.22.** Dokažte, že pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a pro libovolné pevné $a\in\mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,a)=\frac{d}{dx}f(x,a)$$

**Příklad 9.23.** Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1),\quad \text{jestliže}\quad f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

**Příklad 9.24.** Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),\quad \text{jestliže}\quad f(x,y)=\sqrt[3]{xy}.$$

Má funkce $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

**Příklad 9.25.** Má funkce

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

**Příklad 9.26.** Má funkce

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & [x,y]\neq[0,0];\\ 0 & [x,y]=[0,0].\end{cases}$$

v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

**Příklad 9.27.** Spočtěte
$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
pro funkce
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2; \quad f(x,y) = xy + \frac{x}{y}; \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2};$$
$$f(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}; \quad f(x,y) = x^y; \quad f(x,y) = \log\left(x + y^2\right); \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$
$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z; \quad f(x,y,z) = x^{\left(\frac{y}{z}\right)}; \quad f(x,y,z) = x^{(y^z)}.$$

**Příklad 9.28.** Nechť
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
Dokažte, že
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

**Příklad 9.29.** Nechť
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$
Dokažte, že neexistuje
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

**Příklad 9.30.** Spočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí:
$$f(x,y) = x^m y^n, \quad f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2};$$
$$f(x,y) = e^{xy}, \quad f(x,y) = xy + yz + zx, \quad f(x,y) = \frac{z}{x^2+y^2}.$$

**Příklad 9.31.** Odhadněte chybu následujících veličin v závislosti na chybě jednotlivých proměnných:
$$(1+x)^m(1+x)^n, \quad \log(1+x)\log(1+y), \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

**Příklad 9.32.** Objem válce s podstavou o poloměru $r$ a výšce $h$ je dán vzorcem $V = \pi r^2 h$. Je-li výška $v = 5$ cm změřena s přesností na 0.005 cm a poloměr podstavy $r = 3$ cm je změřen s přesností na 0.01 cm, určete, s jakou největší možnou chybou je určen objem válce $V$.

**Příklad 9.33.** Plocha trojúhelníka $ABC$ je dána vzorcem
$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$
Víme-li, že veličiny $b, c, \alpha$ byly naměřeny s přesností na 1% a úhel $\alpha$ byl změřen na $\pi/4$, dokažte, že výsledná plocha je určena s maximální chybou menší než 2.8%.

**Výsledky.** Příklad 9.23: 1.

Příklad 9.24: 0, 0, ne.

Příklad 9.25: ne.

Příklad 9.26: ano.

Příklad 9.31: $1 + mx + ny$, $xy$, $x + y$.

Příklad 9.32: $0{,}345\pi$.

9.4. **Řetízkové pravidlo.**

**Příklad 9.34.** Spočtěte

$$\frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

kde

$$T(x,y) = x^3 - xy + y^3$$

a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

**Příklad 9.35.** Spočtěte

$$\frac{dH}{dt},$$

kde

$$H(t) = \sin 3x - y$$

a

$$x = 2t^2 - 3, \quad y = \frac{t^2}{2} - 5t + 1.$$

**Příklad 9.36.** Poloměr podstavy $r$ rotačního kužele roste o 2 cm za sekundu a výška $h$ roste o 3 cm za sekundu. Spočtěte míru růstu objemu $V$ v okamžiku, kdy $r = 5$ cm a $h = 15$ cm.

**Příklad 9.37.** Lokální atmosférická teplota $T$ závisí na prostorových souřadnicích $x, y, z$ daného bodu a na čase $t$ podle vzorce

$$T(x,y,z,t) = \frac{xy}{1+z}(1+t).$$

Teploměr je připevněn k meteorologickému balónu, který se pohybuje atmosférou po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = t,\ y = 2t,\ z = t - t^2.$$

Určete míru změny teploty v čase $t = 1$.

**Výsledky.** Příklad 9.34:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 3r^2\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) - 2r\cos\theta\sin\theta,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 3r^2(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta\sin\theta + r^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right).$$

Příklad 9.35:

$$\frac{dH}{dt} = (11t+5)\cos\left(\tfrac{11}{2}t^2 + 5t - 10\right).$$

Příklad 9.36:

$$\frac{dV}{dt} = 125\pi \text{ cm}^3\text{s}^{-1}.$$

Příklad 9.37: teplota roste o 14 stupňů za hodinu.